F. Kundt

Arithmetische Aufgaben

für Lyzeen und höhere Mädchenschulen

Verlag von B. G. Teubner in Leipzig und Berlin

Arithmetische Aufgaben

mit einem Anhange von Aufgaben aus der Stereometrie

für Lyzeen (höhere Mädchenschulen)

und die unteren Klassen der Studienanstalten

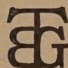
Auf Grund der Ausführungsbestimmungen zu dem Erlasse vom 18. August 1908 über die Neuordnung des höheren Mädchenschulwesens bearbeitet

von

F. Kundt
Oberlehrerin an der Königlichen Elisabethschule
(Lyzeum, Oberlyzeum, Studienanstalt)
in Berlin

Vierte Auflage

Mit 13 Figuren im Text



Leipzig und Berlin
Druck und Verlag von B. G. Teubner
1912

Gebunden 2 Mark

Vorwort zur ersten Auflage.

Das vorliegende Übungsbuch für Arithmetik und Algebra, mit einem Anhange von Aufgaben aus der Stereometrie, enthält das Übungsmaterial, das für die vier oberen Klassen derjenigen zehnklassigen höheren Mädchenschulen erforderlich ist, die den Bestimmungen über die Neuordnung des höheren Mädchenschulwesens von 1908 entsprechen. Es ist ferner für den Gebrauch in den unteren Klassen der Studienanstalten für die weibliche Jugend bestimmt.

Diese Aufgabensammlung ist einerseits das Ergebnis der Erfahrungen meines achtjährigen Mathematikerunterrichts an dem Kgl. Lehrerinnenseminar, der Augusta- und der Elisabethschule zu Berlin, andrerseits der vielseitigen Anregung, welche ich der Mitarbeit an den Lehrplänen für höhere Mädchenschulen verdanke.

In der Anordnung ihrer einzelnen Abschnitte schließt sich die Aufgabensammlung dem „Lehrbuch der Mathematik für höhere Mädchenschulen und Lyzeen" von Professor Crantz unmittelbar an. Selbstverständlich kann sie auch neben jedem andern Lehrbuch gebraucht werden; etwa notwendige Abweichungen von der Anordnung lassen sich um so leichter vornehmen, als die einzelnen Abschnitte durch Überschriften gekennzeichnet sind.

Es ist mein Wunsch, der Mädchenschule eine Aufgabensammlung zu geben, welche die Reformbestrebungen auf dem Gebiete des mathematischen Schulunterrichts in weitgehender Weise berücksichtigt, ohne die Wege zu vernachlässigen, die sich in langjähriger Praxis als gangbar erwiesen haben. Es wird mit der Auswertung von Funktionen bereits in § 1 begonnen, und zahlreiche Funktionsaufgaben sind den einzelnen Kapiteln eingegliedert. Ferner ist den graphischen Darstellungen eine wichtige Stellung eingeräumt worden, in der Überzeugung, daß die Beschäftigung mit den Bildern der Funktionen ein sehr wirksames Mittel zur Belebung des Unterrichts, vor allem aber eine ebenso einfache wie vorzügliche Hilfe zum scharfen Erfassen des Funktionsbegriffes ist.

In den methodischen Bemerkungen der neuen Lehrpläne heißt es: „Ein breiter Raum ist auf allen Stufen den Anwendungen unter möglichster Selbstbetätigung der Schülerinnen zu widmen". Um dieser Forderung Rechnung zu tragen, sind, dem jugendlichen Alter der Lernenden entsprechend, viele leichte Aufgaben eingefügt, die den Schülerinnen die Möglichkeit selbständigen Lösens geben und dadurch das Gefühl des Könnens und Lust und Liebe zur Arbeit erwecken und steigern werden. — Besondere Sorgfalt ist auf die Anfangskapitel verwendet worden. Die zahlreichen angesetzten Gleichungen ersten Grades mit einer Unbekannten sollen der weiteren Befestigung der Grundrechnungsarten dienen; beruhen doch die Schwierigkeiten, die das Lösen von Aufgaben später oftmals bereitet, erfahrungsgemäß meist auf Lücken in den Grundlagen. — Aufgaben mit gebrochenen Zahlen treten von Anfang an auf. Wenn auch die systematische Behandlung der Bruchrechnung

erst im Anschluß an die Division erfolgen kann, so ist es doch meines Erachtens nötig, die im Rechenunterricht der Mittelstufe erworbenen Kenntnisse nicht in Vergessenheit geraten zu lassen. — Daß eine große Anzahl von Anwendungen der Gleichungen ersten Grades mit einer Unbekannten gegeben worden sind, wird, wie ich hoffe, jedem erfahrenen Lehrer zweckmäßig erscheinen; es geschah, um für verschiedene Jahrgänge eine Auswahl zu ermöglichen und um schwächeren Schülerinnen etwas Material zum Üben zu geben. Die Gleichungen des § 28 sind für Klasse 4 bestimmt und sollen durch ihre Einfachheit die Scheu vor dem Ansetzen von Textgleichungen verschiedenster Art überwinden helfen. Die Hauptabschnitte der Gleichungen ersten Grades sind nach Sachgebieten geordnet, um Gelegenheit zur systematischen Behandlung von Verhältnissen des praktischen Lebens zu bieten. Sie schließen sich inhaltlich den aus dem voraufgegangenen Rechenunterrichte bekannten Gebieten der bürgerlichen Rechnungsarten an und werden durch Berücksichtigung der Planimetrie, der Naturwissenschaften und der Erdkunde hoffentlich zu der allgemein geforderten Verbindung der Unterrichtsfächer ein wenig beitragen.

Die Aufgaben aus berühmten Sammlungen des Altertums, sowie der Cossisten des Mittelalters dienen der Belebung des Unterrichts und geben Gelegenheit zu kulturgeschichtlichen Einblicken. Sie sollen aber vor allem in den Schülerinnen die Vorstellung erwecken, daß das, was ihnen heute im Mathematikunterrichte gegeben werden kann, das Ergebnis einer Jahrhunderte langen Arbeit ist. —

Es ist mir eine Freude, Herrn Professor Crantz auch an dieser Stelle für alle Förderung meiner Arbeit meinen herzlichen Dank zu sagen, ebenso den freundlichen Helfern, die mich bei der Korrektur unterstützt haben.

Ich füge den Wunsch hinzu, daß das Buch an seinem Teile dazu beitragen möge, den Unterricht in der Mathematik, die zur Freude vieler ihren Einzug in die Mädchenschule gehalten hat, anregend und praktisch zu gestalten!

Berlin, im September 1909.

Vorwort zur vierten Auflage.

Die vierte Auflage ist ebenfalls im wesentlichen der unveränderte Abdruck der ersten, mit Ausnahme einiger Korrekturen wie einer Umstellung der Aufgaben Nr. 24 bis 43 auf S. 66 und 67.

Eine große Verbesserung bedeutet jedoch die mehrfarbige Darstellung der Funktionsbilder S. 20 ff. Ich spreche der Verlagsbuchhandlung an dieser Stelle meinen besonderen Dank dafür aus.

Es sei ferner erwähnt, daß ein kurzer Anhang in Vorbereitung ist. Er wird einige weitere Aufgaben über die Grundrechnungsarten und Gleichungen mit zwei Unbekannten enthalten, auf Wunsch einiger Schulen mit Doppelzöten, sowie eine kleine Vermehrung des Aufgabenmaterials über Multiplikation, Division usf. für diejenigen Anstalten, die ein Rechnen mit Potenzen ausschließen. Wegen Lieferung dieses Anhanges wird gebeten, sich direkt mit der Verlagsbuchhandlung in Verbindung zu setzen.

Berlin, im März 1912. **F. Kundt.**

Inhalt.

IX. Proportionen.

X. Gleichungen ersten Grades und einer Unbekannten.

XI. Anwendungen der Gleichungen ersten Grades mit einer Unbekannten.

XII. Gleichungen ersten Grades mit mehreren Unbekannten.

XIII. Anwendungen der Gleichungen ersten Grades mit mehreren Unbekannten.

XIV. Quadratwurzeln. Quadratische Funktionen. Quadratische Gleichungen.

Anhang.

I. Addition und Subtraktion absoluter Größen.

§ 1.

Addition eingliedriger Größen.

1. Bilde die Summe der Größen: a) x und x; b) a und a und a.
2. Schreibe die Summe:
   a) aus 7 Summanden c; b) aus 5 Gliedern m auf zweifache Weise
3. Was bedeutet: a) 3b; b) 5n; c) 7x?
4. Addiere: a) 2x zu 7x; b) 35a zu 56a; c) 81b zu 25b; d) 3,5c zu 2,3c; e) $2\frac{1}{2}$m zu $4\frac{1}{4}$m.
5. Vermehre: a) 3b um 8b; b) 7a um 13a; c) 75x um 21x; d) 7,05y um 2,35y; e) $3\frac{1}{3}$p um $2\frac{5}{6}$p.
6. Bilde die Summe der Zahlen:
   a) 5t; 8t; 7t; b) 9x; 5x; 11x; c) 31n; 15n; 29n; d) 4,1z; 3,7z; 2,2z; e) $2\frac{3}{4}$a; $3\frac{1}{2}$a; $1\frac{3}{4}$a.
7. 8b + 7b.
8. 17a + 23a.
9. 7,6a + 2,4a.
10. 9,3m + 2,8m
11. $2\frac{1}{2}y + 3\frac{3}{4}y$.
12. $5\frac{5}{6}p + 2\frac{1}{3}p$.
13. 40b + 25b + 5b.
14. 37x + 2x + 11x + 20x.
15. 120a + 71a + 52a + 27a.
16. 6n + 12n + 5n + 13n + 10n + 4n.
17. 3,3z + 5,7z + 8,1z + 4,5z + 0,4z
18. 12,15b + 3,12b + 2,97b + 4,56b.
19. $3\frac{1}{2}a + 4\frac{1}{2}a + 1\frac{3}{4}a + \frac{3}{4}a + 1\frac{1}{2}a$.
20. $5\frac{11}{15}x + 2\frac{7}{15}x + 7\frac{4}{5}x + 7x$.
21. Addiere: a) 3b zu a; b) 25 zu d; c) 3,5y zu 2,1z.
22. Welche Zahl ist: a) um 5; b) um 3n; c) um 11a; d) um 4n + 7 größer als n?
23. Bilde die Summe der Zahlen: a) 3p; 4p; 2n; b) 7a; 9x; 11a; c) 3,2r; 5,3r; 7,7p; d) $8\frac{1}{3}$q; $5\frac{2}{3}$n; $1\frac{5}{6}$n.
24. Welche Zahl ist: a) um 2n + 1 größer als 7; b) um $2\frac{11}{12}$a größer als $5x + 3\frac{1}{12}a$?

25. Vermehre: a) $13m$ um $11m$ und füge zur Summe $10m$ hinzu;
b) $2{,}3a$ um $5{,}1a$ und füge zur Summe $2{,}6a$ hinzu;
c) $3\frac{1}{4}x$ um $2\frac{1}{2}x$ und füge zur Summe $4\frac{1}{4}x$ hinzu

26. $2b + 3b + 4c$.

27. $12a + 7a + 8b + 5b$.

28. $28c + 13c + 34d + 21d$.

29. $84a + 71a + 95b + 48b$

30. $85a + 14a + 72b + 36b + 86c + 36c$.

31. $10{,}52m + 6{,}38m + 5{,}84m + 12{,}44n + 2{,}26n + 3{,}16n$.

32. $8{,}25a + 4{,}56a + 5{,}31a + 9{,}62b + 3{,}45b + 2{,}07b$.

33. $4\frac{3}{8}p + 2\frac{1}{2}p + 3\frac{1}{8}p + 2\frac{2}{3}q + 1\frac{5}{6}q + 3\frac{1}{6}q$.

34. $6\frac{1}{2}x + 3\frac{1}{4}x + 2\frac{3}{4}x + 8\frac{3}{4}y + 2\frac{1}{2}y + 1\frac{1}{4}y$.

35. In eine Sparbüchse waren zuerst a ℳ, dann b ℳ getan, in eine andere zuerst b ℳ, dann a ℳ. Setze 1) $a = 5$ und $b = 3$; 2) $a = 3{,}5$ und $b = 6$ und stelle den Inhalt jeder der Sparbüchsen zeichnerisch dar.

36. Verändere die Reihenfolge der Summanden so, daß die Addition möglichst einfach wird, und addiere:

a) $87a + 50a + 13a$;
b) $66x + 35x + 25x + 34x$;
c) $385b + 272b + 118b + 115b$;
d) $1{,}93c + 2{,}12c + 2{,}07c + 1{,}08c$;
e) $3\frac{5}{12}y + 4\frac{1}{4}y + 1\frac{3}{4}y + 2\frac{7}{12}y$.

37. $3x + 4y + 5x + 5y$.

38. $89q + 93p + 52q + 48p$.

39. $17x + 23y + 9x + 8x + 7y$.

40. $125a + 85m + 36m + 75a + 170m + 142a$.

41. $54y + 53z + 28y + 11z + 28y + 49z$.

42. $95u + 86v + 73u + 11v + 15u + 66v$.

43. $11a + 5b + 8c + 7a + 4c$.

44. $45x + 54 + 33y + 25y + 22x + 14$.

45. $225 + 184m + 175 + 210n + 215m + 188n$.

46. $5a + 3b + 2a + 11a + b + 16c + 13b$.

47. $33m + 34q + 26 + 16q + 41m + 7q + 41q + 53$.

48. $20 + 32x + y + 18 + 11x + 2 + 15x + 34y + 2x + 35y$.

49. $3{,}5a + 5{,}2b + 5{,}3a + 4{,}7b$.

50. $10{,}88a + 32{,}55b + 14{,}12a + 11{,}45b$.

51. $7{,}653x + 2{,}51x + 8{,}435y + 5{,}125y + 0{,}727x$.

52. $5{,}95p + 5{,}137q + 2{,}48p + 1{,}405r + 0{,}163q + 3{,}305r$.

53. $1{,}302y + 1{,}05 + 3{,}723z + 1{,}998y + 1{,}507z + 2{,}25$.

54. $2\frac{1}{2}a + 4\frac{1}{3}b + 3\frac{1}{4}a + 1\frac{1}{3}b$.

55. $6\frac{2}{5}m + 2\frac{3}{8}p + 3\frac{1}{10}m + 2\frac{1}{4}p.$
56. $\frac{4}{5}x + \frac{3}{8}y + \frac{1}{4}y + \frac{3}{10}x + \frac{7}{10}x + \frac{7}{8}y.$
57. $3\frac{1}{2}b + 5c + 2b + 2\frac{1}{3}c + 1\frac{3}{4}b + \frac{5}{6}c.$
58. $3\frac{5}{12}a + \frac{3}{4}a + 5\frac{2}{3}b + a + \frac{1}{3}a + 4\frac{1}{2}b.$
59. Welchen Wert hat die Summe $x + y$, wenn
1) $x = 7$; $y = 11$; 2) $x = 3{,}5$; $y = 5{,}7$;
3) $x = \frac{5}{6}$; $y = \frac{3}{4}$; 4) $x = 3\frac{1}{2}$; $y = 2\frac{1}{3}$ ist?
60. Bestimme den Wert von $x + y + z$ für:
1) $x = 7$; $y = 9$; $z = 4$;
2) $x = 2{,}5$; $y = 4{,}2$; $z = 5{,}3$;
3) $x = 1\frac{3}{4}$; $y = 5\frac{1}{2}$; $z = 2\frac{7}{8}$.
61. Setze $a = 3x$; $b = 5y$; $c = 6x$; $d = 7y$ und bestimme den Wert von:
1) $a + b$; 2) $a + c$; 3) $b + d$; 4) $a + b + c$;
5) $b + c + d$; 6) $a + c + d$; 7) $a + b + d$; 8) $a + b + c + d$.
62. Welchen Wert erhält der Ausdruck $y = x + 3$, wenn für die Größe x der Reihe nach die Werte 1; 2; 3 ... bis 10 eingesetzt werden?
63. Wie groß wird y, wenn in $y = 7 + x$ für x der Reihe nach die Werte 10; 9 ... bis 1 eingesetzt werden?
64. Gib in dem Ausdruck $y = x + 7{,}5$ der Größe x nacheinander die Werte 1; 2,5; 4,3; 9,7 und bestimme den Wert, den die abhängige Größe y annimmt.
65. Löse in gleicher Weise die Aufgabe $y = x + 5$ für $x = 2$; 4; 6; 8; 10 und stelle eine „Wertetabelle" auf:

Wertetabelle:

$x =$	2	4	6	8	10
$y =$					

66. Setze in $y = 12 + x$ für x die Werte der ungeraden Zahlen zwischen 4 und 20 ein und berechne den Wert der Funktion y. Aufstellen einer Wertetabelle.

---

§ 2.

Addition von Summen.

1. Addiere zu $5a$ die Summe der Größen:
1) $2a$ und $3a$; 2) $5a$ und $7b$;
3) $3{,}7c$ und $2{,}1a$; 4) $4\frac{1}{2}a$ und $8\frac{2}{3}x$.

2. Vergrößere 11x um 9x und addiere zur Summe:
   1) 5x; 2) 5,4x; 3) 10,5m; 4) $13\frac{1}{5}$p.
3. Vermehre 3,2y um 5,5z und addiere zur Summe:
   a) 2,3y; b) 0,7z; c) 2,4y; d) $4\frac{7}{10}$z.
4. Füge zur Summe der Größen $8\frac{1}{2}$a und $7\frac{2}{5}$b:
   a) 4,75a; b) $3\frac{1}{2}$b; c) $\frac{3}{10}$b; d) $2\frac{3}{8}$a hinzu.
5. Wieviel km hat ein Radfahrer im ganzen zurückgelegt, wenn er in der ersten Stunde 34 km, in der zweiten 29 km, in der dritten 27 km gefahren ist? Mache eine Zeichnung im Maßstabe von 1:1000000.
6. Ein Schlittschuhläufer legt in der ersten Sekunde 9 m, in der zweiten 10 m, in der dritten 7 m zurück. Wieviel m hat er in 3 Sekunden zurückgelegt? (Zeichnung im Maßstabe von 1:200.)
7. $2a + (3a + 4b)$.
8. $5b + (3a + 2b)$.
9. $21x + (36y + 10x)$
10. $67m + (125n + 52m)$.
11. $32y + (45z + 14y)$.
12. $9q + 30 + (33q + 15)$.
13. $55z + (63x + 12z) + 14x$.
14. $0,8b + 0,7c + (0,5c + 0,5b)$.
15. $3,5a + (2,3b + 2,7a) + 5,2b$.
16. $\frac{4}{5}m + (\frac{5}{6}q + \frac{7}{10}m + \frac{7}{12}q)$.
17. $5\frac{2}{3}x + (2\frac{3}{4}y + 4\frac{1}{3}x + 8\frac{1}{4}y)$.
18. Bilde die Summe der Zahlen 5b und 7b und addiere sie zur Summe der Zahlen:
   1) 8a und 3b; 2) 25,55a und 14,33b;
   3) $4\frac{1}{2}$b und $2\frac{1}{3}$b; 4) $2\frac{5}{7}$b und $10\frac{11}{12}$x.
19. Vergrößere 18x um 13y und addiere zur Summe:
   a) $15x + 25y$; b) $1,3x + 8y + 16,9z$; c) $3\frac{4}{5}y + 1\frac{7}{10}y$.
20. $7a + (3b + 2a) + (2a + b) + 2b$.
21. $35a + (27b + 16a) + (28b + 4a) + 11a$.
22. $12x + (17x + 15y) + (13y + 16x) + 12y$.
23. $9a + (2a + 7b) + 3b + (9a + 5b)$.
24. $85m + (36q + 54p) + 72q + (48m + 46p) + 15p$.
25. $27 + 15p + (33q + 31) + (57p + 23q) + 20 + (20p + 7 + 43q)$.
26. $3,25x + (5,04x + 9,87y) + (12,76x + 10,57y) + 4,5x$.
27. $4,7a + (3,2b + 5,3c) + 2,7b + (5,3a + 3,1b) + 2,7c$.
28. $13,45x + 15,92z + (18,3y + 8,9z + 10,5x)$
    $+ (4,6x + 12,14y + 9,84z)$.
29. $(2\frac{1}{3}x + 1\frac{3}{5}y) + (1\frac{1}{6}x + 3\frac{3}{4}z) + (2\frac{9}{10}y + 1\frac{3}{4}z)$
30. $5\frac{3}{8}c + (6\frac{5}{6}d + 2\frac{1}{4}c) + 2\frac{1}{3}d + (3\frac{5}{8}c + 3\frac{1}{4}d)$.

31. $\frac{3}{4}b + (\frac{11}{12}c + \frac{3}{5}b + \frac{2}{3}c) + \frac{7}{12}c + (\frac{13}{20}b + \frac{5}{6}c)$.

32. $8\frac{3}{4}a + (7\frac{3}{7}b + 9\frac{2}{3}c) + 10\frac{5}{14}b + (7\frac{3}{4}a + 2\frac{5}{7}b + 8\frac{5}{6}c)$.

33. Welchen Wert nimmt die Summe $2a + (3b + a)$ an, wenn:
1) $a = 5$; $b = 6$; 2) $a = 1{,}2$; $b = 1{,}3$;
3) $a = \frac{5}{6}$; $b = \frac{7}{12}$; 4) $a = 3\frac{1}{3}$; $b = 2\frac{1}{6}$ ist?

34. Berechne den Wert des Ausdrucks $2x + (3y + 5)$ für:
1) $x = 8$; $y = 13$; 2) $x = 5{,}5$; $y = 3{,}3$;
3) $x = \frac{3}{4}$; $y = \frac{1}{6}$; 4) $x = 2\frac{5}{12}$; $y = 1\frac{1}{3}$.

35. Wie groß ist die Summe $x + y$, wenn:
1) $x = 2y$; 2) $x = 5y$; 3) $y = 4x$ ist?

36. Setze $x = 3a + 2b$; $y = 4b + 3c$; $z = 2a + 3b$
und bestimme den Wert der Summen:
1) $x + y$; 2) $y + z$; 3) $x + y + z$.

37. Setze in $y = 9 + (x + 4)$ für x der Reihe nach eine jede der ungeraden Zahlen zwischen 0 und 20 ein und berechne den Wert der Funktion y. Aufstellen einer Wertetabelle!

38. Berechne den Wert der Funktion $y = 13 + (7 + x)$, wenn x die Werte der ganzen Zahlen zwischen 0 und 10 annimmt.

---

§ 3.
Subtraktion eingliedriger Größen.

1. Vermindere: a) 85m um 21m; b) 2,68x um 1,72x; c) $9\frac{7}{10}b$ um $3\frac{2}{5}b$.
2. Subtrahiere: a) a von 2a; b) 123d von 248d; c) 7,5p von 9,2p.
3. Was ergibt: a) 250q weniger 167q; b) 4,05a weniger 2,25a; c) $6\frac{1}{2}r$ weniger $5\frac{3}{4}r$?
4. Was erhält man, wenn man: a) 45x von 76x; b) 0,7y von 1,2y; c) $15\frac{1}{2}z$ von $25\frac{7}{10}z$ subtrahiert?
5. Von zwei Orten, die 17 km voneinander entfernt liegen, gehen zwei Freunde, A und B, einander entgegen. Als sie sich treffen, hat A 9 km zurückgelegt. Wieviel km ist B gegangen? (Zeichnung!)
6. Gertrud besitzt m ℳ. Sie gibt p ℳ aus und trägt den Rest auf die Sparkasse. Wie groß ist derselbe? Setze $m = 10{,}5$; $p = 4\frac{1}{2}$ und löse die Aufgabe graphisch!
7. $15x - 9x$. 8. $85a - 47a$. 9. $112c - 75c$.
10. $350m - 187m$. 11. $9{,}5b - 3{,}8b$. 12. $12{,}75y - 11{,}88y$.
13. $\frac{11}{12}u - \frac{1}{4}u$. 14. $10\frac{1}{6}p - 7\frac{1}{2}p$.
15. Vermindere: 1) x um a; 2) 9,9b um 5,5c; 3) $3\frac{1}{4}x$ um $5\frac{1}{2}y$.

16. Bilde die Differenz der Größen:
1) c und d; 2) y und 5; 3) 12,5p und 7,8p; 4) $5\frac{4}{5}x$ und $2\frac{1}{5}x$.
Die erste der angegebenen Zahlen sei der Minuend.

17. Welche Zahl ist: a) um 5 kleiner als x; b) um 2,5c kleiner als 3,2a; c) um $2\frac{3}{4}n$ kleiner als 7n?

18. Berechne die Differenz:

	Minuend.	Subtrahend.
a)	$23x + 15y$	8x;
b)	$12a + 17a$	15a;
c)	$10c + 8d$	2c.

19. Wie groß ist der Minuend, wenn:

a) 12a der Subtrahend und 5a die Differenz ist?
b) 8,3b " " " 10,2b " " "
c) $5\frac{1}{2}x$ " " " $3\frac{3}{4}x$ " " "

20. $9a - 5a + 6b - 2b$.

21. $23p - 17p + 30q - 25q$.

22. $84x - 35x + 75y - 27y$.

23. $95e - 63e + 102f - 69f$.

24. $187m - 40m + 3m + 75p + 28p - 52p$.

25. $53a - 17a + 14a + 83b - 55b + 32b$.

26. $250c - 195c + 70c + 340d - 225d + 40d$.

27. $0{,}3m - 0{,}02m + 0{,}5r - 0{,}04r$.

28. $9{,}67x - 4{,}37x + 11{,}75y - 8{,}25y$.

29. $\frac{3}{4}a - \frac{1}{12}a + \frac{5}{7}b - \frac{3}{14}b$.

30. $5\frac{2}{3}p - 2\frac{1}{6}p + 8\frac{4}{5}q - 3\frac{9}{10}q$.

31. $9a + 7b - 5a - 3b$.

32. $85m + 76n - 74m - 66n$.

33. $152x - 65x + 133y - 52x - 93y$

34. $225c + 250f - 184f - 98c + 36f + 13c$.

35. $104p + 71p + 57q - 90p - 36q + 47q$.

36. $1{,}7r + 2{,}3p - 1{,}2r - 1{,}7p$.

37. $5{,}86y - 1{,}67y + 6{,}75z - 3{,}04z - 3{,}79y + 0{,}59z$.

38. $\frac{2}{5}x + \frac{5}{6}y + \frac{1}{10}x - \frac{1}{3}y$.

39. $6\frac{1}{2}a + 5\frac{7}{12}b - 2\frac{3}{4}a + 3\frac{5}{12}b + 3\frac{1}{4}a$.

40. $8\frac{5}{7}m + 18\frac{1}{6}q + 5\frac{3}{14}m - 3\frac{3}{7}m - 2\frac{5}{6}q$.

41. Berechne den Wert der Differenz $a - b$ für:

1) $a = 18$; $b = 11$; 2) $a = 20{,}11$; $b = 13{,}4$;
3) $a = \frac{11}{12}$; $b = \frac{5}{6}$; 4) $a = 15\frac{7}{20}$; $b = 9\frac{2}{5}$.

42. Setze z: **a)** $= 4$; **b)** $= 11$; **c)** $= 2\frac{1}{2}$; **d)** $= 3{,}2$; **e)** $= 6{,}12$; **f)** $= 4\frac{1}{5}$ und gib den Wert des Ausdrucks $4z - 9$ an.

43. Bestimme den Wert von $2c - 3d$ für:

1) $c = 12$; $d = 6$; 2) $c = 85$; $d = 55$;
3) $c = 55{,}5$; $d = 33{,}3$; 4) $c = \frac{5}{6}$; $d = \frac{1}{2}$.

44. Welchen Wert hat die Differenz $5x - 3y$ für:

1) $x = 15$; $y = 17$; 2) $x = 7{,}4$; $y = 8{,}5$;
3) $x = 2{,}3$; $y = 1{,}9$; 4) $x = \frac{9}{10}$; $y = 1\frac{1}{2}$?

45. Berechne den Wert folgender Funktionen:

1) $y = x - 4$ für $x = 4$ bis $x = 12$;
2) $y = 19 - x$ für $x = 0$ bis $x = 10$

---

§ 4.

Subtraktion von Summen. Addition und Subtraktion von Differenzen.

1. Subtrahiere von $36x$ die Summe der Zahlen:

1) $18x$ und $12x$; 2) $7x$ und $15x$; 3) $20x$ und $15y$;
4) $20{,}55x$ und $4{,}45x$; 5) $24{,}4x$ und $20{,}5z$; 6) $20\frac{1}{3}x$ und $14\frac{1}{2}y$.

2. Welche Zahl ist um $2n + 1$ kleiner als $7n$?

3. Was erhält man, wenn man $25x$ um $11x$ vergrößert und die Summe von $56x$ subtrahiert?

4. Vermehre $15a$ um $9a$ und subtrahiere die Summe:

1) von $25a$; 2) von $25b$; 3) von $31{,}6a$;
4) von $30b + 50a$; 5) von $12x + 13x$; 6) von $40{,}55a + 17{,}45b$.

5. Von einem Stück Leinen von 18 m Länge läßt sich Frau C 7 m, Frau D $5\frac{1}{2}$ m abschneiden. Wie groß ist der Rest? (Zeichnung!)

6. Ein Thermometer, welches mittags 15° C zeigt, fällt bis 4 Uhr nachmittags um 3°, bis 8 Uhr abends um weitere 5 Grad. Wieviel Grad zeigt dasselbe alsdann? (Zeichnung!)

7. Wie groß ist die Differenz, wenn

a) $25c$	der Minuend	und	$11c + 4c$	der Subtrahend	ist?
b) $3{,}5x$	„ „	„	$0{,}8x + 1{,}7x$	„ „	„
c) $10\frac{1}{2}y$	„ „	„	$8\frac{3}{4}y + 1\frac{1}{2}y$	„ „	„
d) $23x + 15y$	„ „	„	$8x + y$	„ „	„
e) $12a + 17b$	„ „	„	$9a + 13b$	„ „	„
f) $85n + 75q$	„ „	„	$45n + 25q$	„ „	„

8. Addiere 15m zu 16p und subtrahiere von dieser Summe die Summe der Größen:

1) 9m und 6p; 2) 10,75m und 10,25p;
3) $5\frac{5}{12}p$ und $3\frac{1}{3}p$; 4) $2\frac{1}{2}m$ und $13\frac{1}{3}p$.

9. $27a - (13a + 11b)$.
10. $96a - (55a + 43b)$.
11. $52y - (13y + 29z)$.
12. $45x + 36y - (23x + 11y)$.
13. $6{,}85m - (3{,}4m + 5{,}67q)$.
14. $2{,}03p + 1{,}36r - (1{,}38p + 0{,}8r)$,
15. $\frac{3}{5}b + \frac{2}{3}c - (\frac{1}{6}c + \frac{4}{15}b)$.
16. $13\frac{7}{12}y + 10\frac{3}{8}z - (5\frac{1}{4}y + 4\frac{1}{4}z)$.
17. $9a + (4a + 5b) - (11a + 3b)$.
18. $15b + (10a + 7b) - (2b + 3b)$.
19. $235x + (185x + 450y) - (170x + 175y)$.
20. $35x + 22y - (11x + 12y) + (10x + 15y)$.
21. $75a + 81b - (64a + 75b) + (19a + 14b)$.
22. $59x + 67y - (32x + 35y) + (13x + 18y)$.
23. $20{,}5b + (10{,}2b + 25{,}3c) - (15{,}2b + 5{,}3c)$.
24. $4{,}86m + 5{,}34p - (2{,}54m + 3{,}25p) + (3{,}34m + 3{,}66p)$.
25. $\frac{3}{5}q + (\frac{7}{10}q + \frac{3}{4}r) - (\frac{3}{10}q + \frac{5}{12}r) - \frac{1}{3}r$.
26. $5\frac{1}{2}c + 6\frac{7}{20}d - (3\frac{3}{4}c + 4\frac{1}{5}d) + (1\frac{1}{4}c + 1\frac{17}{20}d)$

---

27. Addiere zu 15x die Differenz der Zahlen:

1) 8x und 3x; 2) 53x und 38x; 3) 5x und 20y;
4) $7\frac{3}{4}x$ und $2\frac{5}{12}x$

28. Vermindere 12a um 5a und addiere die Differenz zu:

a) 3a; b) 8,5a; c) $a + 8b$; d) $23a + 40b$.

29. Den Minuend zu bestimmen.

Subtrahend.	Differenz.
a) 12a	$8a - 15b$;
b) 35x	$5x - 30y$;
c) 6r	$5q - 3r$;
d) 7m	$5n - 4m$.

30. Subtrahiere von 40x die Summe der Zahlen 32x und 11y und vermindere die Differenz um 3x.

31. Addiere zu 35a die Differenz der Zahlen 24b und 10a und subtrahiere von der erhaltenen Summe $(13a + 12b)$.

32. Subtrahiere 7m von 25m und addiere zu dieser Differenz die Differenz der Zahlen:

1) 20m und 18m; 2) 5q und 11m; 3) 9,5x und 7,5m

33. In einer elektrischen Bahn sitzen a Personen. An einer Haltestelle steigen b Leute aus und c Leute ein. 1) Wieviel Personen befinden sich nunmehr in der Bahn? 2) Setze $a = 21$; $b = 14$; $c = 11$ und löse die Aufgabe graphisch.

34. Zu 5 l Flüssigkeit in einem Faß werden 9 l gegossen. Dann läßt man 11 l ab. Wieviel l sind nun in dem Fasse? Zeichnung!

35. $21a + (5b - 17a)$.

36. $86c + (5d - 42c)$.

37. $95m + (50q - 35m)$.

38. $10{,}2y + (6{,}3x - 2{,}7y)$

39. $13\frac{1}{4}a + (10\frac{1}{2}b - 2\frac{3}{4}a)$.

40. $16a + (12b - 11a) - (2a + 9b)$.

41. $58x + (24y - 35x) - (12x + 48y)$.

42. $3{,}5p + 5{,}1q - (2{,}7p + 1{,}2q) + (1{,}2p - 1{,}4q)$.

43. $13{,}2m + (11{,}5n - 3{,}3m) - (2{,}9n + 1{,}4m)$.

44. $6\frac{3}{5}c + (8\frac{1}{2}d - 1\frac{1}{10}c) - \left(\frac{c}{2} + 4\frac{1}{2}d\right)$.

45. $44a + (15a + 72b) + (6a - 13b) - 5a$.

46. $72a + (83b + 35a) + (12b - 64a) - 41b$.

47. $9{,}6x + (10{,}5y - 5{,}3x) + (4{,}9x - 9{,}2y) + 6{,}7y$.

48. $8\frac{7}{12}m + (6\frac{5}{9}p - 5\frac{3}{4}m) + (2\frac{1}{6}m + 4\frac{2}{3}p) - 8\frac{2}{9}p$

49. $75a + (20a + 17b) + (15b - 13a) - (42a + 2b)$.

50. $93c + (112d - 45c) - (37c + 53d) + (148c + 126d)$.

51. $26{,}32p + (18{,}44r - 11{,}56p) + (10{,}41p + 12{,}25r) - (18{,}69r + 8{,}17p)$

52. $9\frac{1}{2}x + 11\frac{7}{15}y - (6\frac{4}{5}y + 3\frac{5}{9}x) + 15\frac{13}{15}y + (9\frac{1}{18}x - 8\frac{8}{15}y)$

---

53. Subtrahiere von $45a$ die Differenz der Größen:
1) $40a$ und $15a$; 2) $14a$ und $41c$; 3) $30{,}8a$ und $10{,}3a$.

54. Welche Zahl ist um $3x - 10$ kleiner als $13x$?

55. Subtrahiere $(18m - 53p)$ von:
1) $71m$; 2) $33 + 61m$; 3) $95m + 24p$.

56. Vermindere $19x$ um $6y$ und subtrahiere die Differenz von:
1) $20x$; 2) $23x$; 3) $34x$; 4) $35x + 27y$; 5) $20 + 32y$.

57. Wie groß ist die Differenz, wenn
a) $56a$ der Minuend und $45a - 9b$ der Subtrahend ist?
b) $25x$ „ „ „ $15x - 10$ „ „ „
c) $17m$ „ „ „ $25r - 6m$ „ „ „
d) $112y$ „ „ „ $37y - 70z$ „ „ „

58. Vermehre $50x$ um $(5x + 19y)$ und subtrahiere von der Summe die Differenz der Zahlen $37x$ und $6y$.

59. Was erhält man, wenn man 25a um die Summe der Zahlen 12a und 15b vermehrt und von der entstandenen Summe 16a und 5b subtrahiert?

60. $33x - (17x - 21y)$.

61. $285a - (132a - 127b)$.

62. $12{,}55m - (3{,}8m - 6{,}25r)$.

63. $7\frac{1}{5}c - (4\frac{8}{15}c - 3\frac{3}{4}b)$.

64. $40a - (25a - 13b) + (15a + 2b)$.

65. $102p + (113r + 105p) - (82p - 39r)$.

66. $4{,}03x - (1{,}27x - 3{,}05y) + (1{,}95y + 5{,}27x)$

67. $2\frac{3}{4}y + (\frac{11}{14}z - \frac{5}{12}y) - (1\frac{1}{3}y - \frac{3}{14}z)$.

68. $54a - (30a - 36b) + (20a - 18b) - (34a + 8b)$.

69. $125m + (136q + 103m) - (119m - 45q) - (124q + 46m)$.

70. $8{,}44d - (2{,}22d - 5{,}55f) + (2{,}33f - 1{,}11d) - (4{,}88f - 2{,}89d)$.

71. $6\frac{1}{4}x + (9\frac{1}{3}y + 2\frac{1}{2}x) - (3\frac{1}{4}x - 2\frac{1}{6}y) + (1\frac{5}{6}y - 1\frac{1}{2}x)$.

---

72. Setze $a = 5$; $b = 3$; $c = 1$; $d = 9$ und berechne den Wert der folgenden Ausdrücke:

1) $a - (b + c)$; 2) $d + (a - b)$;
3) $3a - (2b + 3c)$; 4) $4d + (7a - 15c) - (15b + d)$;
5) $5d - (12b - 7c) + (a - 4c)$;
6) $40c - (12b - 2d) + (7a - 3d)$.

73. Wie groß ist $12x - (5x + 4y)$, wenn

1) $x = 10$; $y = 15$; 2) $x = 2{,}05$; $y = 3{,}15$;
3) $x = \frac{3}{7}$; $y = \frac{1}{2}$ ist?

74. Welchen Wert hat die Summe $17m + (15q - 7m)$ für:

1) $m = 7$; $q = 8$; 2) $m = 4{,}44$; $q = 2{,}22$;
3) $m = \frac{3}{5}$; $q = \frac{1}{3}$; 4) $m = 3\frac{1}{2}$; $q = 2\frac{1}{5}$?

75. Berechne für $x = 6$; $y = 5$; $z = 3$ den Wert von:

1) $x - (y - z)$; 2) $x + (y - z)$; 3) $6x - (3y + 2z)$;
4) $32y + (18z + x) - (13z - 5x)$;
5) $30z - (18y - 11x) + (7x + 16z)$.

76. Wie groß ist: 1) $A + B + C$; 2) $C + B - A$, wenn $A = 3x + 2y$; $B = 5y - 3x$; $C = 11x + 7y$ ist?

77. Stelle für die folgenden Funktionen Wertetabellen auf:

1) $y = 15 - (3 + x)$ für $x = 3$ bis $x = 12$;
2) $y = 9 - (x - 5)$ für $x = 0$ bis $x = 10$;
3) $y = 7a - (x - a)$ für $x = 0$; 1; 2; 3; 4; a; 2a; 3a; 4a;
4) $y = 11 + (x - 9)$ für $x = 2$ bis $x = 12$;
5) $y = 5b + (7b - x)$ für $x = 1$; 3; 8; 2b; 5b; 10b.

II. Die algebraische Summe.

§ 5.

Addition und Subtraktion relativer Größen.

1. Vereinige die folgenden Größen:
   a) $+7x$ und $+8x$; b) $-4b$ und $-11b$;
   c) $+12p$ und $-8p$; d) $-5a$ und $+13a$;
   e) $+3{,}5y$ und $+7{,}8y$; f) $-9\frac{1}{2}c$ und $-11\frac{1}{3}c$;
   g) $20a+15a-25a$; h) $44x-29x+13x-8x$;
   i) $-56u+43u-27u+45u$; k) $0{,}3a+0{,}6a-0{,}5a+0{,}7a$;
   l) $-2{,}5b-7{,}5b+4{,}3b+2{,}8b$;
   m) $-4\frac{1}{2}y+9\frac{3}{4}y-2\frac{3}{4}y+6\frac{1}{2}y$.
2. Addiere zu $(+12a)$:
   a) $+8a$; b) $+18a$; c) $+10a$; d) $+12b$.
3. Subtrahiere von $(+50x)$:
   a) $+45x$; b) $+86x$; c) $+100x$; d) $+58x$.
4. a) $8+(+5)$; b) $5-(+8)$; c) $-5+(+8)$
5. a) $15+(+25)$; b) $-11-(+14)$; c) $17-(+9)$.
6. a) $-34+(+18)$; b) $-17+(+13)$; c) $25+(+11)$.
7. a) $7+(+13)$; b) $4-(+9)$; c) $22-(+19)$.
8. a) $-9-(+11)$; b) $-13+(+26)$; c) $-35-(+53)$.
9. a) $3a+(+7a)$; b) $-5x+(+7x)$; c) $12y-(+5y)$.
10. a) $9d+(+d)$; b) $-b-(+a)$; c) $a-(+b)$
11. a) $1-(+a)$; b) $1+(+a)$; c) $a+(+1)$.
12. a) $-a+(+a)$; b) $-11c-(+c)$; c) $m+(+3)$.
13. a) $5-(+x)$; b) $2x-(+3y)$; c) $2x+(+7x)$.
14. a) $0{,}7b-(+0{,}2b)$; b) $-1{,}3m+(+3{,}5m)$;
    c) $2{,}55q+(+3{,}25q)$.
15. a) $3{,}5a+(+2{,}7a)$; b) $-8{,}4y-(+3{,}8y)$;
    c) $9{,}3m-(+2{,}2m)$.
16. a) $-\frac{2}{5}t-(+\frac{7}{10}t)$; b) $\frac{7}{12}r+(+\frac{3}{4}r)$; c) $-2\frac{4}{9}n+(+6\frac{2}{3}n)$.
17. a) $-4\frac{2}{3}x-(+1\frac{1}{6}x)$; b) $3\frac{5}{8}y-(+2\frac{1}{4}y)$;
    c) $-6\frac{4}{5}z+(+2\frac{3}{10}z)$.

---

18 Addiere: a) $(+9)$ und (-5); b) $(-3b)$ und $(-5b)$;
   c) $(+a)$ und $(-b)$; d) $(-8x)$ und $(-7x)$
19. Addiere zu $(+34)$: a) -12; b) -16; c) -30; d) -59.

20. Subtrahiere von $(-75x)$:
a) $-58x$; b) $-25x$; c) $-75x$; d) $-96x$.

21. Subtrahiere $(-43x)$ von:
a) $+98x$; b) $-37x$; c) $-86x$; d) $+28x$.

22. Subtrahiere $(-85a)$ von
a) $+100a$; b) $+27a$; c) $-35a$; d) $-109a$.

23. a) $11+(-5)$; b) $11-(-5)$; c) $-21+(-18)$.
24. a) $21-(-13)$; b) $-35+(-16)$; c) $18-(-23)$.
25. a) $-25-(-26)$; b) $-46-(-31)$; c) $1+(-a)$.
26. a) $a+(-1)$; b) $a-(-1)$; c) $1-(-a)$.
27. a) $3a+(-7a)$; b) $-18a-(-25a)$; c) $45a+(-54a)$.
28. a) $-47x-(-23x)$; b) $89x+(-36x)$; c) $-72x+(-65x)$.
29. a) $-89e-(-63e)$; b) $-93e+(-93e)$; c) $-93e-(-47e)$.
30. a) $0{,}5b+(-0{,}3b)$; b) $-0{,}7b-(-0{,}3b)$; c) $0{,}9b-(-0{,}9b)$.
31. a) $3{,}45m-(-2{,}05m)$; b) $-8{,}63m+(-2{,}48m)$;
c) $6{,}39m-(-3{,}64m)$.
32. a) $-\frac{2}{5}d+(-\frac{3}{10}d)$; b) $-\frac{3}{4}d+(-\frac{5}{12}d)$; c) $\frac{5}{6}d+(-\frac{2}{3}d)$
33. a) $4\frac{1}{2}y-(-1\frac{2}{3}y)$; b) $-3\frac{2}{5}y+(-4\frac{3}{10}y)$; c) $2\frac{2}{3}y-(-2\frac{1}{2}y)$.

---

34. Drücke die Summe folgender Zahlen aus, ohne das Rechnungszeichen hinzuzufügen:
1) $(+x)$ und $(-y)$;
2) $(+x)$ und $(-y)$ und $(+z)$;
3) $(-7x)$ und $(+15y)$ und $(-3x)$;
4) $(+2x)$ und $(+5y)$ und $(-x)$ und $(-6y)$.

35. Ersetze die folgenden Ausdrücke durch die Summe der entsprechenden relativen Zahlen:
1) $x-y$; 2) $3a-5b$; 3) $4m+7$; 4) $2c-3d+4e$.

Addiere in den Aufgaben Nr. 36—79 die untereinander stehenden Glieder.

36.	37.	38.	39.
$7y$	$25a$	$-0{,}9m$	$2\frac{1}{2}d$
$-3y$	$+36a$	$+0{,}3m$	$-1\frac{3}{4}d$
$+9y$	$-47a$	$-0{,}5m$	$+3\frac{1}{2}d$
$-8y$	$+21a$	$+0{,}7m$	$-2\frac{1}{4}d.$

40.	41.	42.	43.
$3m+n$	$5-2n$	$4m+7$	$8n-5$
$+2n$	$-3n$	-7	$-3n$

44. $\begin{array}{r} a + 2b \\ -3b \\ \hline \end{array}$ **45.** $\begin{array}{r} 4a - 3b \\ -a \\ \hline \end{array}$ **46.** $\begin{array}{r} 5b - 3a \\ +7a \\ \hline \end{array}$ **47.** $\begin{array}{r} 3b + 8a \\ -10b \\ \hline \end{array}$

48. $\begin{array}{r} x + 1 \\ x + 2 \\ \hline \end{array}$ **49.** $\begin{array}{r} x - 1 \\ x + 1 \\ \hline \end{array}$ **50.** $\begin{array}{r} 2x + 3 \\ x - 3 \\ \hline \end{array}$ **51.** $\begin{array}{r} 5x - 7 \\ 2x + 14 \\ \hline \end{array}$

52. $\begin{array}{r} 5x + 2y \\ 3x - 10y \\ \hline \end{array}$ **53.** $\begin{array}{r} 3x - 7y \\ -5x + 9y \\ \hline \end{array}$ **54.** $\begin{array}{r} 4y - 11x \\ 9y + 20x \\ \hline \end{array}$ **55.** $\begin{array}{r} x - 2y \\ x + 2y \\ \hline \end{array}$

56. $\begin{array}{r} 5 - 2a \\ 3a + 5 \\ \hline \end{array}$ **57.** $\begin{array}{r} 3a - 2b \\ 5b - 3a \\ \hline \end{array}$ **58.** $\begin{array}{r} 11b - 7a \\ 12a - 6b \\ \hline \end{array}$ **59.** $\begin{array}{r} 15 - 3b \\ 10b + 9 \\ \hline \end{array}$

60. $\begin{array}{r} 2a \\ +3b \\ +5a \\ -10b \\ \hline \end{array}$ **61.** $\begin{array}{r} 7b \\ -3a \\ +4a \\ -8b \\ \hline \end{array}$ **62.** $\begin{array}{r} -15x \\ +13y \\ +17x \\ -10y \\ \hline \end{array}$ **63.** $\begin{array}{r} 23x \\ -27y \\ -40x \\ +42y \\ \hline \end{array}$

64. $\begin{array}{r} m \\ +n \\ -n \\ +2m \\ \hline \end{array}$ **65.** $\begin{array}{r} a \\ -b \\ +2b \\ +c \\ \hline \end{array}$ **66.** $\begin{array}{r} 3{,}2a \\ +4{,}7b \\ -1{,}9a \\ -2{,}7b \\ \hline \end{array}$ **67.** $\begin{array}{r} 5\tfrac{1}{2}a \\ -2\tfrac{3}{4}b \\ +4\tfrac{1}{2}b \\ -6\tfrac{3}{4}a \\ \hline \end{array}$

68. $\begin{array}{r} 3a + 4b - 5c \\ 7a - 15b + 13c \\ \hline \end{array}$ **69.** $\begin{array}{r} 56a - 36b - 17c \\ -41a + 11b - 13c \\ \hline \end{array}$

70. $\begin{array}{r} 8a - 5b + 7c - 3d \\ -7a + 4b - 6c + 2d \\ \hline \end{array}$ **71.** $\begin{array}{r} 48a + 34b - 47c - 56d \\ -22a - 69b + 91c + 3d \\ \hline \end{array}$

72. $\begin{array}{r} 5a - 3b + c - 7d + 9e - 11f + 13g - 15h \\ -13a + 14b - 5c + 24d + e + 11f - 2g - 2h \\ \hline \end{array}$

73. $\begin{array}{r} -3a + 7b + 8c - d + 5e + 2f - 3g - h \\ 5a - 4b - 7c + 3d - 9e + 5f + 3g - 2h \\ \hline \end{array}$

74. $\begin{array}{r} 2{,}3m - 2{,}1n + 1{,}8o - 5{,}2p - 3{,}6q + 2{,}7r - 3{,}1s - 4{,}3t \\ -6{,}8m - 1{,}4n + 3{,}4o + 6{,}7p - 1{,}2q - 4{,}3r + 5{,}6s - 1{,}1t \\ \hline \end{array}$

75. $\begin{array}{r} -1\tfrac{1}{2}m + 2\tfrac{3}{4}n + 3\tfrac{4}{5}o - 1\tfrac{3}{8}p + 2\tfrac{3}{10}q - 3\tfrac{1}{2}r - 2\tfrac{1}{3}s + 3\tfrac{1}{4}t \\ 1\tfrac{1}{2}m + 1\tfrac{3}{4}n - 6\,o + 3\tfrac{1}{4}p - 5\tfrac{1}{2}q - 1\tfrac{1}{4}r + 3\tfrac{5}{6}s - 5\tfrac{5}{8}t \\ \hline \end{array}$

76. $\begin{array}{r} 7x - 5y - 8z \\ -11x + 9y + 3z \\ 18x - 21y - 25z \\ \hline \end{array}$ **77.** $\begin{array}{r} -\tfrac{3}{4}x + \tfrac{2}{5}y - \tfrac{2}{3}z \\ \tfrac{1}{8}x - \tfrac{7}{10}y - \tfrac{1}{6}z \\ \tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{2}y + \tfrac{1}{2}z \\ \hline \end{array}$

78.
$$\begin{array}{r} 36x - 47y + 53z - 36 \\ -21x + 29y + 11z + 45 \\ 41x - 58y - 31z - 53 \\ 43x - 24y + 67z - 43 \\ \hline \end{array}$$

79.
$$\begin{array}{r} 3{,}66 + 2{,}12x - 3{,}45y - 1{,}54z \\ -1{,}25 - 6{,}37x - 5{,}50y + 4{,}85z \\ 4{,}34 - 3{,}63x + 3{,}28y + 2{,}93z \\ -1{,}75 + 0{,}88x - 2{,}33y - 2{,}24z \\ \hline \end{array}$$

---

80. Min. $4a + b$
Subtr. $-3b$

81. Min. $2a - 5b$
Subtr. $+7a$

82. Min. $-11a + 18b$
Subtr. $+9b$

83. Min. $6a + 5$
Subtr. -2

84. Min. $5x - 11$
Subtr. $-3x$

85. Min. $15 - 7x$
Subtr. $+11$

86. Min. $28x - 21y$
Subtr. $-56y$

87. Min. $-43x + 52y$
Subtr. $-98x$

Subtrahiere in den Aufgaben Nr. 88 bis Nr. 103: α) das zweite Polynom vom ersten. β) das erste Polynom vom zweiten.

88. $m + n$
$m - n$

89. $m - 3$
$m - 3$

90. $2 + m$
$4 - m$

91. $1 - n$
$-3 + n$

92. $5p - 3q$
$3p + 5q$

93. $7p + 11q$
$-8p - q$

94. $-15p - 22q$
$-32p + 9q$

95. $29p + 13q$
$15p - 2q$

96. $5a + 4b - 7c$
$3a + 4b - 10c$

97. $3{,}2a - 5{,}3b - 11{,}5c$
$-5{,}3a + 2{,}7b - 9c$

98. $9m - 5n + 11p - 6q$
$-7m - 24n + 32p + 7q$

99. $2{,}5m + 3{,}1n - 4{,}2p + 1{,}9q$
$1{,}8m + 3{,}5n - 5{,}1p + 2{,}4q$

100. $36a - 25b + 51c - 45d + 19e - 37f$
$21a - 45b + 76c - 15d - 16e - 77f$

101. $\frac{2}{3}m - \frac{3}{4}n - \frac{1}{5}o - \frac{3}{8}p + \frac{1}{2}q + \frac{5}{12}r$
$\underline{\frac{1}{2}m - \frac{5}{8}n + \frac{3}{10}o - \frac{1}{4}p + \frac{1}{4}q + \frac{1}{6}r}$

102. $4{,}3a + 2{,}3b - 3{,}5c - 5{,}1d + 2{,}7e + 3{,}2f - 4{,}7g - 5{,}3h$
$\underline{-2{,}2a + 5{,}7b - 8{,}3c - 2{,}5d - 3{,}2e + 6{,}9f - 9{,}1g + 1{,}4h}$

103. $1\frac{1}{2}m - 2\frac{1}{3}n - 1\frac{3}{4}p + 3\frac{1}{5}q + 2\frac{1}{2}r + 1\frac{4}{5}x + 3\frac{1}{3}y - 2\frac{1}{5}z$
$\underline{-1\frac{1}{2}m + 2\frac{2}{3}n + 1\frac{1}{4}p - 2\frac{4}{5}q + 4\frac{1}{2}r - 2\frac{1}{5}x + 2\frac{1}{3}y + 4\frac{4}{5}z}$*)

---

104. Berechne den Wert der Funktionen $y = x - 2$ für $x = 0; +1; +4; +10; -1{,}5; -2\frac{1}{2}; -3\frac{1}{3}$.

105. Berechne die Größe der abhängigen Variablen (y) aus der Funktion $y = x + 2$, wenn für die unabhängige Variable (x) nacheinander die Werte $-4; -3; -2; -1; 0; +1; +2; +3; +4$ gesetzt werden. (Tabelle.)

106. Wie groß wird die Funktion $4a - x$ für $x = 4; 10; a; 3a; 7a; 10a$.

107. Die folgenden Funktionen durch Tabellen darzustellen:

$$\left.\begin{array}{ll} a) & y = x + 3 \\ b) & y = x - 4 \\ c) & y = x - 7 \\ d) & y = 5 - x \\ e) & y = 3{,}5 - x \\ f) & y = x - 1\frac{1}{2} \\ g) & y = 4\frac{2}{5} - x \end{array}\right\} \text{von } x = -4 \text{ bis } x = +7.$$

Nach diesem Abschnitt können die Gleichungen § 27, Nr. 1—133, gelöst werden.

---

§ 6.

Verwendung und Auflösung von Klammern.

1. Addiere $(6a + 3b)$ zu $4a - 10b$.
2. Bilde die Summe der Polynome $(3x - 4y + 5z)$ und $(3x + 4y - 5z)$.
3. Vermehre $55d - 32f$ um $(63f - 30d)$.
4. Subtrahiere $(86p + 35q)$ von $91p - 42q$.
5. Subtrahiere von $23a - 41$ das Polynom $(23a - 85 + 33b)$.
6. Bilde die Summe der Polynome $(3a + 2b)$ und $(5a - 7b)$ und subtrahiere sie von $10a - 8b$.

---

*) Als weiteres Übungsmaterial für die Subtraktion können die Aufgaben S. 11 und 12, Nr. 40—75, des Abschnitts über Addition benutzt werden.

7. Subtrahiere die Differenz der Polynome $(6x - 11y)$ und $(5y - 7x)$ von $14x - 15y$.

8. Addiere zu $5m + 4n$ die Differenz der Polynome $(36m + 25n)$ und $(-19m - 11n)$.

9. Minuend: $86p - 65q$; Subtrahend: $(65p - 22q) - (16p + 11q)$. Bestimme die Differenz.

10. Die Richtigkeit der Ausrechnung zu prüfen, indem man in den Aufgaben 1 bis 9 die folgenden Werte substituiert:

1) $a = 2$; $b = 5$. 2) $x = 1$; $y = 3$; $z = 5$.
3) $d = 6$; $f = 3$. 4) $p = 7$; $q = 2$.
5) $b = 4$. 6) $a = 11$; $b = 10$.
7) $x = 0{,}2$; $y = 0{,}3$. 8) $m = 0{,}5$; $n = 0{,}2$.
9) $p = 0{,}1$; $q = 0{,}4$.

11. $12 + (6 + 15)$.
12. $32 + (-25 - 17)$.
13. $47 - (38 - 11)$.
14. $75 - (52 - 37)$.
15. $a + (b - c + d)$.
16. $a - b - (a - b)$.
17. $54a + (32a - 17a + 31a)$.
18. $81a - (35a + 72a - 55a)$.
19. $36a + (17a - 51b)$.
20. $93a - (47a - 38b)$.
21. $a + (b - a) - (b + a)$.
22. $m - (m + n) + (m - n) + n$.
23. $32x + (15x - 13y) - (22x - 43y)$.
24. $27x - (25y + 13x) + 21y - (17x - 10y)$.
25. $12a + (7b - 3a) - 11b - (15a - 4b) + 6a$.
26. $4{,}9b + 5{,}3c + (3{,}2b - 3{,}6c) - (1{,}2c + 8{,}1b)$.
27. $9{,}1b - (7{,}5c - 5{,}6b + 3{,}2c) + 9{,}8c + (6{,}3b + 8{,}5c)$.
28. $3{,}82p - (2{,}45q + 1{,}37p) + (3{,}65q - 3{,}69p)$.
29. $1{,}22p + (1{,}55q - 3{,}11p) - (2{,}11p - 4{,}99q)$.
30. $1\frac{1}{2}x - (2\frac{1}{4}y + 3\frac{1}{4}x) - (-3\frac{3}{4}x + 2\frac{3}{4}y)$.
31. $3\frac{2}{5}x + (4\frac{2}{3}y - 2\frac{1}{5}x) - (1\frac{4}{15}x - 1\frac{1}{6}y) + 3\frac{11}{15}x$.

---

32. $15 + [21 - (-19 - 11 + 18) - 12] + 17$.
33. $23 - (16 + 17) - [35 + (25 - 18) - 45] - 17$.
34. $a - [(b - a) + (a - b)]$.
35. $a + (b - c) - [a - (b + c) - c]$.
36. $a + [(b + c) - (b - c)] - (b - a) - b$.
37. $11x - (8x + 3y) - [9x - 11y - (6x - 12y)]$.
38. $0{,}2x + 0{,}3y + [0{,}5y - 0{,}1x - (-0{,}9x - 0{,}8y)]$.

39. $5{,}4x - [-3{,}7y - (2{,}5x + 4{,}3y) + 2{,}3x] - 3{,}4y.$

40. $-(\frac{7}{12}b + \frac{7}{8}a) - [-\frac{1}{8}a + (\frac{5}{12}b - \frac{5}{8}a) + \frac{11}{12}b].$

41. $-2\frac{1}{2}a - [3\frac{1}{3}b - (4\frac{1}{2}a + 2\frac{2}{3}b) - 4\frac{1}{3}b] + (3\frac{1}{2}a + 1\frac{2}{3}b).$

---

42. $25 - \{12 - [10 + (6 - 5) + 8] - 6\}.$

43. $87 + \{53 - (22 + 5) - [49 + (32 - 15) + 11]\}.$

44. $3p - \{6q - [5p - (4q + 7p) - 3q]\} - 8q.$

45. $3m - n - \{-2m - [3n - (2n + 3m) - m]\}.$

46. $-(2a + 5b) - \{7a + [3b - (5a - 4b) + 4a] - 9b\}.$

47. $0{,}8d + \{0{,}5f - [(0{,}3d - 0{,}7f) - (0{,}9d + 0{,}3f)] - 0{,}2d\}.$

48. $-\frac{4}{9}x + (\frac{2}{15}y - \frac{1}{9}x) - \{[\frac{4}{5}y - (\frac{5}{9}x + \frac{3}{5}y) - \frac{2}{3}x] + \frac{11}{15}y\}$
$- (-\frac{1}{3}x + \frac{1}{5}y).$

Siehe Gleichungen § 27, Nr. 134—173.

III. Graphische Darstellungen.

§ 7.

Darstellung linearer Funktionen.

1. Suche auf einer graphischen Darstellung der Zahlenreihe die Strecken auf, die der Zahl x entsprechen, wenn $x = 3;\ 5;\ 24;\ 7\frac{1}{2};\ 0;\ -\frac{1}{2};\ -4{,}9$ ist.

2. Zeichne eine Gerade X′X und auf ihr einen festen Punkt 0. Bestimme den Punkt, der von 0 die Entfernung x hat für: $x = 5$ cm; $8\frac{1}{2}$ cm; 0 cm; -45 mm; 77 mm; -2 cm; $+3{,}5$ cm; -65 mm.

3. Ein Körper bewegt sich auf einer Geraden XX′ von einem festen Punkte 0 aus um p cm nach X′ hin. Dann kehrt er um und bewegt sich um q cm nach X hin. An welchem Punkte A der Geraden befindet er sich nunmehr, wenn

1)	2)	3)	4)
$p = 4$	$p = 8$	$p = 2$	$p = 1{,}5$
$q = 2$	$q = 3\frac{1}{2}$	$q = 5$	$q = 6{,}2$ ist?

Anm. Für die folgenden Zeichnungen empfiehlt es sich, Millimeterpapier zu benutzen

4. Errichte auf X′X in 0 die Senkrechte und bestimme auf ihr den Punkt, der von 0 um y Einheiten entfernt ist: y = 2 cm; $5\frac{1}{2}$ cm; — 35 mm; 82 mm; — 4 cm; — 6,2 cm; + 28 mm; — 47 mm.

5. Zeichne ein rechtwinkliges Koordinatensystem, bezeichne Achsen und Anfangspunkt und bestimme die Punkte mit den Koordinaten:

1) $x = 3$	2) $x = -3$	3) $x = 3$	4) $x = -3$
$y = 5$	$y = -5$	$y = -5$	$y = 5$.

6. Zeichne die Punkte mit den Koordinaten:

1) $x = 6$	2) $x = 2\frac{1}{2}$	3) $x = -7$	4) $x = -4{,}5$
$y = 3$	$y = -5$	$y = 3{,}5$	$y = -2{,}9$.

7. Konstruiere die Punkte, die den Gleichungen $x = a$ und $y = b$ genügen, für:

1) $a = 2$	2) $a = 7$	3) $a = -4{,}5$	4) $a = -3\frac{1}{10}$
$b = 5$	$b = -3$	$b = 5{,}8$	$b = 4\frac{1}{2}$.

8. Bestimme die Punkte mit den Koordinaten:

1) $x = 0$; $y = 2$ 2) $x = 5$; $y = 0$ 3) $x = 0$; $y = 0$.

9. Wie lautet die Gleichung a) eines Punktes der X-Achse, b) eines Punktes der Y-Achse, c) des Anfangspunktes des Koordinatensystems?

---

10. Stelle für die Funktion $y = x + 2$ von $x = -3$ bis $x = +3$ die Tabelle auf. Trage die 7 Punkte, welche durch die zusammengehörigen Werte von x und y bestimmt sind, in ein Koordinatensystem ein und verbinde P_1 mit P_2, P_2 mit P_3 usf. bis P_7

11. Zeichne auf ähnliche Weise die Kurve der Funktion $y = 6 - x$ für $x = 0$ bis $x = 8$

12. Stelle die Funktion $y = x - 4$ für $x = +5$ bis $x = -5$ graphisch dar.

13. Die in den Aufgaben S. 3 Nr. 65 u. 66, S. 5 Nr. 37 u. 38, S. 7 Nr. 45, S. 10 Nr. 77 und S. 15 Nr. 104 bis 107 berechneten Funktionen graphisch darzustellen.*)

14. Zeichne das Bild der Funktion $y = 2x + 3$ für $x = 1$; 2 und 3 und gib aus der Zeichnung an, in welchem Punkte die entstandene Gerade a) die X-Achse, b) die Y-Achse schneidet.

---

*) In den Fällen, in denen sich sehr große Ordinatenwerte ergeben, benutze man als Längeneinheit $\frac{1}{2}$ cm, 1mm oder dgl.

15. Setze für x nacheinander die Werte 0 und 1 und gib an, wo die durch die Funktion $y = 3x + 1$ bestimmte Gerade die Achsen schneidet. Warum genügen zwei Punkte zur Bestimmung der Geraden?

16. Die Funktion $y = 2x + 5$ graphisch darzustellen, indem man dem x zwei beliebige Werte gibt, daraus y berechnet und schließlich die Gerade zeichnet, die durch diese zwei Punkte bestimmt ist.

Auf dieselbe Weise die Geraden zu konstruieren, die durch die folgenden Gleichungen bestimmt sind:

17. $y = x + 4$. **18.** $y = x - 5$. **19.** $y = 5x - 3$.

20. $y = 3x + 7$. **21.** $y = 4x - 1$. **22.** $y = 3x + 4$.

23. Um wieviel Einheiten steigt y in der linearen Funktion $y = 3x + 2$, wenn x um 1 zunimmt? Wie groß ist die auf der Ordinatenachse abgeschnittene Strecke?

24. Gib Steigungsmaß und Abschnittsstrecke der Geraden an, deren Gleichungen lauten:

1) $y = 4x + 7$ 2) $y = 2x$ 3) $y = ax + b$

4) $y = -ax + b$ 5) $y = ax - b$ 6) $y = -ax - b$.

Untersuche ferner, durch welche der Quadranten jede dieser Geraden geht.

25. Wie lautet die Gleichung einer Geraden, welche um q Einheiten auf je eine Längeneinheit ansteigt und von der Ordinatenachse p Einheiten abschneidet? Setze 1) $q = 5$; $p = 2$; 2) $q = 3$; $p = 4$; 3) $q = \frac{2}{5}$; $p = 2$ und zeichne die Gerade.

26. Zeichne eine Gerade, die durch den Punkt P_1 mit den Koordinaten $x_1 = 1$; $y_1 = 5$ und den Punkt P_2 mit den Koordinaten $x_2 = -2$; $y_2 = -4$ geht. Stelle die Gleichung der Geraden auf, löse sie und untersuche, ob der rechnerisch gefundene Wurzelwert mit dem aus der Figur abzulesenden übereinstimmt.

27. Dieselbe Aufgabe für $x_1 = -2$; $y_1 = +3$ und $x_2 = +2$; $y_2 = -6$.

28. Zeichne die Gerade, deren Gleichung $y = x$ ist. Wie groß ist der Winkel, den sie mit der X-Achse bildet?

29. Zeichne die Gerade, deren Gleichung $y = a$ ist, für 1) $a = 4$ cm; 2) $a = -25$ mm.

30. Wie lautet die Gleichung der Geraden, die in einer Entfernung von b cm der X-Achse parallel läuft?

31. Bringe die Gleichung $3x = 2 + 7x$ auf die Normalform, bilde dann die Funktionsgleichung, löse dieselbe graphisch und gib an, in welchem Punkte die Gerade die X-Achse schneidet. Setze den durch Zeichnung gefundenen Wurzelwert in die Gleichung ein und mache rechnerisch die Probe.

Löse die folgenden Gleichungen ebenfalls graphisch:

32. $5x + 5 + 3x = 7x + 2.$ **33.** $2x + 3 = 6x + 7 - 5x.$

34. $3x + 2x - 4x = 12 - 5x.$

35. $3x - 2 - 2(4x - 3) = 2(2x - 1) - 3.$

36. $\frac{5x+2}{6} - \frac{3x-1}{4} = \frac{x}{4} + \frac{3x-4}{8}.$

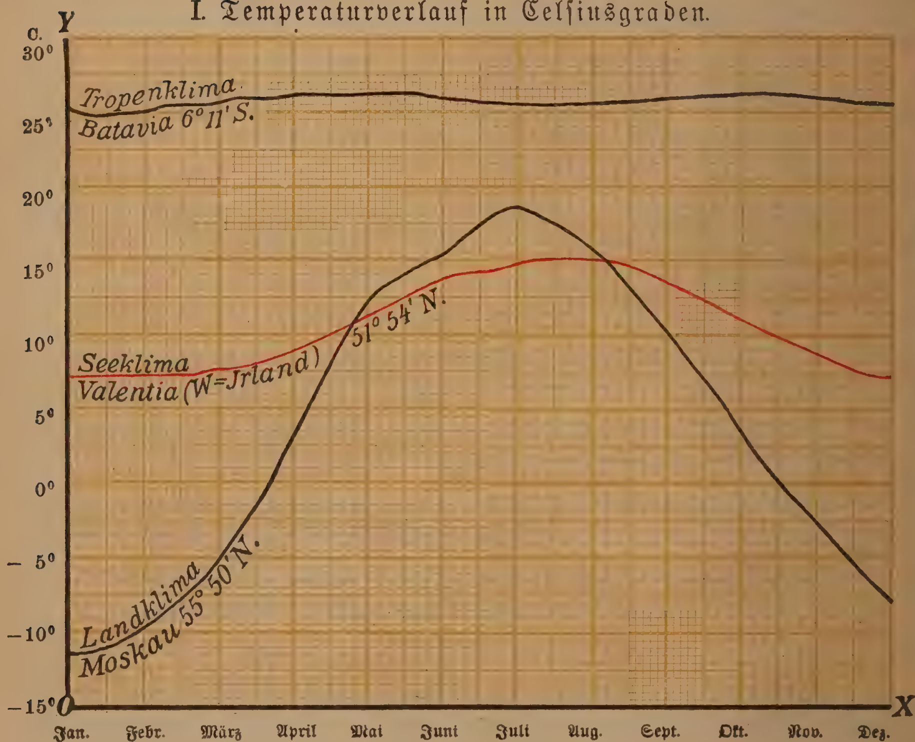
Weitere Übungen liefern die leichteren Gleichungen in § 27.

---

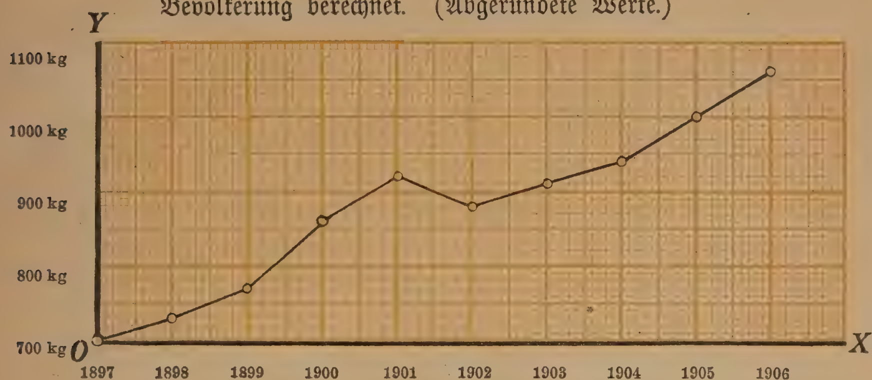
§ 8.

Abbildungen von Funktionen.

I. Temperaturverlauf in Celsiusgraden.



II. Verbrauch von Braunkohlen
im deutschen Zollgebiete in den Jahren 1897 bis 1906, auf den Kopf der Bevölkerung berechnet. (Abgerundete Werte.)

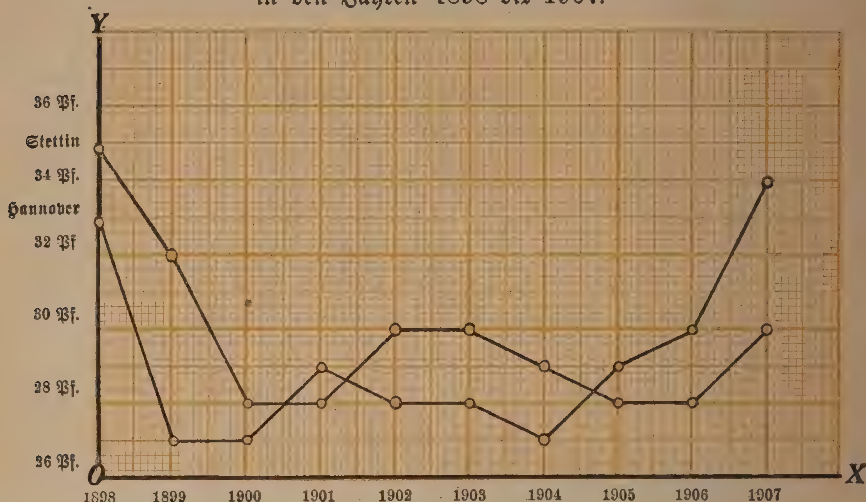


III. Steigungsverhältnisse der Wengernalpbahn.



IV. Preisschwankungen.

Preise für 1 kg Weizenmehl in Pfennig in Stettin und Hannover in den Jahren 1898 bis 1907.



Zu Darstellung V

Diese drei Kurven sind Ergebnisse einer Fahrt eines Luftballons.

1. Wie lange dauerte dieselbe?

2. Welche größte Höhe wurde bei dieser Fahrt erreicht?

3. Um ? m stieg der Ballon a) in der ersten, b) in der zweiten, c) in der dritten Stunde?

4. Wie lange stieg er im ganzen?

5. Vergleiche die Zeitdauer des Steigens mit der des Fallens.

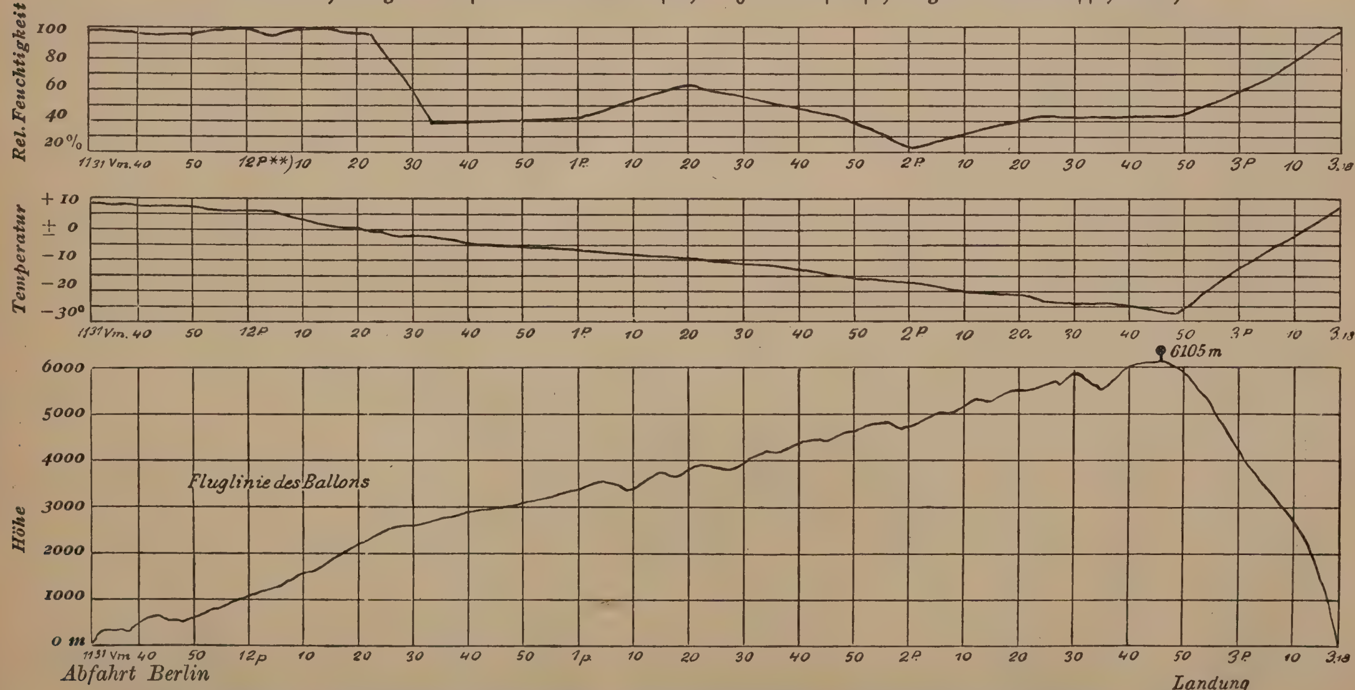
6. War die Geschwindigkeit bei Beginn oder am Ende des Fallens größer?

7. Vergleiche die Temperaturkurve mit der Höhenkurve. Welche Veränderung der Temperatur zeigt sich im allgemeinen beim Steigen, welche beim Fallen des Ballons?

8. Im Bericht über die Fahrt wird gesagt, daß der Ballon bei heftigem Regen aufstieg, daß er aber in einer Höhe von 2500 m aus dem Wolkenmeer heraustrat und sich in blendendem Sonnenlicht befand. Inwiefern zeigt die Feuchtigkeitskurve diese Tatsachen?

9. Welche andere Stelle der Feuchtigkeitskurve läßt darauf schließen, daß der Ballon im Sonnenschein war? und in welcher Höhe war er nunmehr?

V. Beobachtungen auf einer Ballonfahrt zur Erforschung der Atmosphäre.*)



*) Den „Beiträgen zur Erforschung der Atmosphäre mittels des Luftballons", herausgegeben von Richard Aßmann, mit Genehmigung des Herausgebers entnommen.

**) P (für PM = post meridiem) bezeichnet die Zeit von 12 Uhr mittags bis 12 Uhr nachts im Gegensatz zu AM = ante meridiem

Zu Darstellung VI

1. *) Welche Größen sind als Abszissen, welche als Ordinaten aufgetragen worden?

2. Zeige auf dem Plane die Stellen, an denen ein schneller fahrender Zug einen langsameren derselben Richtung überholt. Wo nur ist dies möglich? Wo hingegen können sich Züge verschiedener Richtung begegnen auf Strecken, welche, wie diejenigen dieses Plans, zweigleisig sind? Wo nur auf eingleisigen Strecken?

3. In welchem Verhältnis stehen Steilheit der Linien und Fahrtgeschwindigkeit der Züge zueinander?

4. Ist die Geschwindigkeit des 6^4 aus Rummelsburg abfahrenden Güterzuges auf der ganzen Strecke dieselbe?

5. Miß und gib an, wann die aus Rummelsburg abgelassenen Güterzüge dort abgehen und wann sie in Fürstenwalde ankommen.

6. Lies aus dem Plane ab, wann Güterzüge in Rummelsburg einlaufen.

7. Wann trifft der um 6^{10} aus Charlottenburg abgehende Schnellzug in Fürstenwalde ein? wann der um 7^{28} abgelassene Personenzug?

8. Wann fährt der Zug, der 7^{50} in Hengelsberg eintrifft, am Schlesischen Bahnhof ab?

9. Wieviel länger fährt der in Fürstenwalde um 7^{24} nach Rummelsburg abgelassene Güterzug als der um 9^{23} abgehende?

10. Wo ist der Zug, der Bahnhof Friedrichstraße um 6^{30} verläßt a) um 7^{10}, b) um 7^{20}?

11. Wie lange Aufenthalt hat der aus Rummelsburg um 7^0 abgehende Zug a) in Cöpenick, b) in Hengelsberg?

---

§ 9.

Aufgaben zur Darstellung.

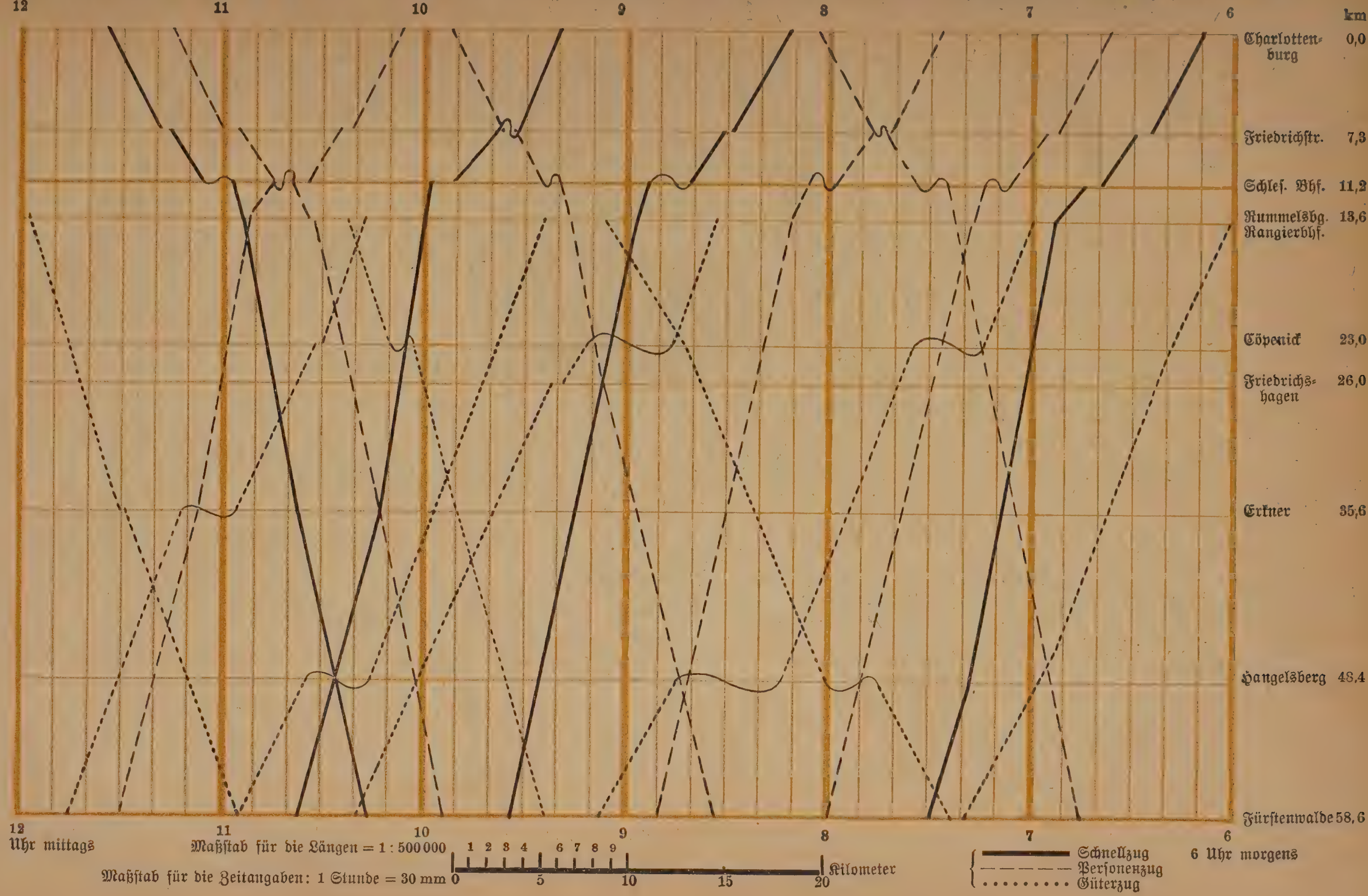
1. An eingegangenen Briefsendungen entfielen in Deutschland auf den Kopf der Bevölkerung in den Jahren 1901 bis 1905 der Reihe nach 63; 66; 69; 71; 73. — Trage auf der Abszissenachse die Zeiten ab (1 Jahr = 1 cm) und auf der Ordinatenachse die Anzahl der Briefe (1 Brief = 1 mm) und zeichne die Kurve. Für die graphische Darstellung kommt nur der Abstand von 63 und 73 in Betracht.

2. Im deutschen Zollgebiet kam auf den Kopf der Bevölkerung jährlich durchschnittlich folgender Zuckerverbrauch:

---

*) Um den nebenstehenden Plan übersichtlicher zu machen, sind nicht alle Stationen und Züge eingetragen worden. Aus demselben Grunde sind die Ziffern, welche auf den von der Eisenbahnverwaltung benutzten graphischen Fahrplänen Ankunfts- und Abfahrtszeiten der Züge auf den Stationen angeben, sowie auch die Nummern der einzelnen Züge weggelassen worden.

VI. Fahrplan der über die Ferngleise der Berliner Stadtbahn gehenden Züge und der Strecke Berlin (Schlesischer Bahnhof)-Fürstenwalde.



Jahre	kg	Jahre	kg
1876—81	5,8	1891—96	10,6
1881—86	7,0	1896—01	11,9
1886—91	8,4	1901—06	14,5

Trage die Zeiten als Abszissen (5 Jahre = 1 cm), die Anzahl der Kilogramm als Ordinaten (1 kg = 1 cm) ein und zeichne die Kurve.

3. Während einer Erkrankung an Lungenentzündung wurden folgende Körpertemperaturen des Patienten gemessen:

Tag	Temperatur in Celsiusgraden		Tag	Temperatur in Celsiusgraden	
	6ʰ morgens	6ʰ abends		6ʰ morgens	6ʰ abends
1.	37	40	6.	39,1	40
2.	39,3	40,4	7.	39,6	37
3.	39,1	40	8.	36,4	36,6
4.	37,9	39,5	9.	35,8	36,6
5.	39,3	40,1	10.	36,3	37

12 Stunden = $\frac{1}{2}$ cm; $1^0 = 1$ cm. Zeichne die Fieberkurve. (Für die Darstellung von Fieberkurven ist nur der Abstand zwischen 35^0 und 42^0 erforderlich; warum?)

4. Bei einem Typhuskranken wurden folgende Temperaturen beobachtet:

Tag	Temperatur		Tag	Temperatur	
	morgens	abends		morgens	abends
1.	37	37,8	12.	39,5	40,6
2.	37,6	38,4	13	39,2	40,8
3.	38,2	39,5	14.	39,3	40,4
4.	38,6	40	15.	38,6	40
5.	39,6	40,5	16	39,2	39,7
6.	39,8	40,6	17.	38,6	39,3
7.	39,8	40,6	18.	37,6	39,2
8.	40	40,8	19.	37	38,4
9.	40	40,7	20.	37	38,2
10.	39,9	40,7	21.	36,7	38
11.	39,4	40,6	22.	37	37,2

Die Fieberkurve ist zu zeichnen.

5. Länge der Fernsprechleitungen im Deutschen Reiche.

Jahr	In 100 000 km	Jahr	In 100 000 km
1901	11,8	1904	22,3
1902	14,5	1905	26,9
1903	18,1		

Jahresabstand = 1 cm; 100000 km = $\frac{1}{2}$ cm.

6. Durchschnittskurve der $3\frac{1}{2}$prozentigen preußischen Staatsanleihe an der Berliner Börse.

Jahr	Kurs	Jahr	Kurs
1885	99,06	1900	95,82
1890	100,52	1905	101,41
1895	104,43		

5 Jahre = 2 cm; 1 M = 1 cm. (Die Darstellung ist auf den Abstand von 95 M und 105 M zu beschränken.)

7. Der durchschnittliche Marktzinsfuß in % an der Berliner Börse.

Jahr	Jan.	Febr.	März	April	Mai	Juni	Juli	Aug.	Sept.	Okt.	Nov.	Dez.	i. Jahr
1902	2,11	1,85	1,79	1,65	1,98	2,17	1,59	1,73	2,14	2,73	3,11	3,38	2,19
1903	2,26	1,90	2,69	2,61	3,09	3,29	2,96	3,30	3,68	3,32	3,46	3,54	3,01
1904	2,58	2,77	3,44	2,83	3,10	2,98	2,60	2,62	3,09	3,69	3,99	3,94	3,14
1905	2,56	1,93	2,22	1,91	2,30	2,34	2,12	2,23	2,99	4,00	4,62	4,99	2,85
1906	3,81	3,35	4,02	3,44	3,39	3,68	3,49	3,43	4,23	4,83	5,27	5,58	4,04

Monatsabstand = 1 cm; 1% = 2 cm.

a) Zeichne die Kurve des durchschnittlichen Jahreszinsfußes der 5 Jahre.
b) Zeichne die Kurven der einzelnen Jahre.
c) Zeichne die Kurven mehrerer Jahre auf einem Blatt und ziehe sie in verschiedenen Farben aus.

8. Mittlere monatliche Niederschlagsmengen in mm für Städte im Monsungebiet.

	Jan.	Febr.	März	April	Mai	Juni	Juli	Aug.	Sept.	Okt.	Nov.	Dez.
Calcutta	11	24	33	55	144	302	325	342	262	130	17	7
Bombay	3	0	0	1	14	522	624	378	278	45	12	1

1 Monat = 1 cm; 100 mm = 1 cm der Darstellung.
Beide Kurven auf einem Blatt zeichnen.

9. Mittlere monatliche Niederschlagsmengen (in mm) in Berlin in den Jahren 1903 bis 1905.

Jahr	Jan.	Febr.	März	April	Mai	Juni	Juli	Aug.	Sept.	Okt.	Nov.	Dez.
1903	31,8	49,8	15,0	52,2	53,6	33,2	57,4	57,8	52,1	68,5	60,0	10,9
1904	28,7	46,6	16,6	38,4	68,1	36,2	35,1	34,9	49,8	37,7	45,3	45,9
1905	33,7	39,1	40,6	55,2	33,0	66,4	77,4	78,4	94,0	85,4	53,4	33,8

1 Monat = 1 cm; 1 mm Regenhöhe = 1 mm.
Zeichne die 3 Kurven auf einem Blatt.

10. Mittlere Lufttemperatur in Celsiusgraden im Jahre 1905.

	Jan.	Febr.	März	April	Mai	Juni	Juli	Aug.	Sept.	Okt	Nov.	Dez.
Bremen (15,8 m über dem Meere)	0,6	2,8	5,5	6,0	13,0	18,3	18,5	16,9	13,6	6,2	3,9	2,6
Berlin (48,9 m)	−0,5	2,9	5,3	6,4	14,5	19,4	19,8	18,2	14,0	5,8	4,3	2,2
München (526,4 m)	−3,3	0,8	4,9	7,1	11,9	17,4	20,7	17,6	14,0	4,0	3,2	0,3

Monatsabstand = 1 cm; $1^0 = \frac{1}{2}$ cm.
Die 3 Kurven auf einem Blatt zeichnen.

11. Durchschnittliche Marktpreise von Nahrungsmitteln.

I) 1 kg Rindfleisch kostete in Pfennig:

Jahr	Berlin	Dresden	Hannover	Kiel	München	Stuttgart
1892	128	146	130	145	140	145
1894	125	145	124	137	140	152
1896	122	143	126	125	148	147
1898	125	147	127	119	144	148
1900	126	148	129	129	140	148
1902	134	151	132	127	144	148
1904	138	148	141	131	138	154
1906	154	172	158	150	160	164

2 Jahre = 1 cm; 1 Pfennig = 1 mm. Zeichne die Kurve für jede der Städte auf demselben Blatt und ziehe die sechs Kurven verschiedenfarbig aus.

II) 1 kg Butter kostete in Pfennig:

Jahr	Berlin	Dresden	Hannover	Kiel	München	Stuttgart
1892	236	261	229	241	204	230
1894	235	253	226	216	210	250
1896	230	247	209	213	224	230
1898	224	243	210	212	204	230
1900	233	254	217	231	218	230
1902	230	254	227	233	214	234
1904	234	265	236	246	206	237
1906	250	273	249	261	216	245

2 Jahre = 1 cm; 1 Pfennig = 1 mm.

III) 100 kg Kartoffeln kosteten in Mark:

Jahr	Berlin	Dresden	Hannover	Kiel	München	Stuttgart
1891	7,40	7,63	7,46	8,83	7,26	7,98
1894	4,79	4,88	4,82	5,98	5,48	6,37
1897	4,95	6,27	4,79	4,66	6,56	7,45
1900	4,94	5,79	4,77	5,50	6,06	6,66
1903	4,93	5,98	5,63	5,68	6,04	7,22
1906	4,29	5,83	5,20	5,44	5,10	7,74

3 Jahre = 1 cm; 1 ℳ = 1 cm.

12. I) Gesamteinfuhr über die deutsche Zollgrenze an Weizen, Roggen, Hafer und Gerste in den Jahren 1898 bis 1906.

Jahr	Weizen	Roggen	Hafer	Gerste
	in 100000 Tonnen			
1898	15,8	8,9	4,9	11,6
1899	16,0	5,9	3,1	11,1
1900	13,0	9,7	5,6	7,8
1901	23,1	8,9	4,8	9,1
1902	22,0	9,9	5,0	11,3
1903	21,3	8,3	5,6	16,1
1904	22,2	4,7	4,4	14,0
1905	24,8	5,9	1,3	16,7
1906	20,9	6,7	6,8	20,8

1 Jahr = 1 cm; 100000 Tonnen = $\frac{1}{2}$ cm.

II) Gesamtausfuhr über die deutsche Zollgrenze an Weizen, Roggen, Hafer und Gerste in den Jahren 1898 bis 1906.

Jahr	Weizen	Roggen	Hafer	Gerste
	in 100000 Tonnen			
1898	3,3	1,4	1,0	0,3
1899	3,4	1,5	1,0	0,3
1900	3,9	1,2	2,0	0,4
1901	2,4	1,0	2,2	0,4
1902	2,6	1,4	2,2	0,5
1903	3,5	2,2	1,9	0,5
1904	3,3	3,6	2,9	0,4
1905	3,4	3,3	2,3	0,3
1906	3,5	2,6	3,4	0,2

1 Jahr = 1 cm; 100000 Tonnen = 2 cm.

Zeichne auf je einem Blatt:

1) die Einfuhr- und Ausfuhrkurve von a) Weizen, b) Roggen, c) Hafer, d) Gerste;
2) die vier Einfuhrkurven;
3) die vier Ausfuhrkurven.

13. Die Einfuhr und Ausfuhr im Gesamthandel einiger wichtiger Länder der Erde.

Länder		Wert der Waren in 100 Millionen Mark.								
		1890	1892	1894	1896	1898	1900	1902	1904	1906
Deutsches Zollgebiet	E.	45	43	42	46	54	61	60	67	87
	A.	37	33	33	40	41	50	50	56	69
Belgien	E.	26	23	22	24	26	29	32	35	46
	A.	24	21	19	22	24	26	28	31	41
Frankreich	E.	44	42	39	40	45	48	46	46	57
	A.	39	37	33	37	38	44	45	46	55
Großbritannien	E.	86	87	83	90	96	107	108	112	124
	A.	67	60	56	61	60	72	71	76	94
Österreich-Ungarn	E.	10	11	12	12	14	15	15	18	19
	A.	13	12	14	14	15	18	17	19	20
Rußland	E.	10	8	12	13	13	13	13	14	13
	A.	17	10	15	15	16	15	19	22	22
Verein. Staaten von Amerika	E.	33	35	28	33	26	36	38	42	52
	A.	36	43	37	37	52	59	59	61	73
China	E.	6	5	5	7	6	7	9	10	14
	A.	5	5	5	5	5	5	6	7	9

a) Zeichne auf **einem** Blatt 1) die Einfuhrkurven, 2) die Ausfuhrkurven mehrerer Länder. 2 Jahre = 1 cm; 100 Millionen *M* = 1 mm.
b) Zeichne auf **einem** Blatt die Einfuhr- u. Ausfuhrkurven mehrerer Länder

14. Steigungsverhältnisse der Harzquerbahn.

Entfernung in km	Station	Höhe in m
0	Wernigerode	232
14,1	Dreiannen-Hohne .	543
19	Elend	502
26,3	Sorge	490
30,7	Benneckenstein . . .	569
41,1	Tiefenbachmühle . . .	410
46,6	Netzkater	309
49,8	Ilfeld	255
53,6	Niedersachswerfen-Ost	212
60,5	Nordhausen	182

Die Entfernungen sind als Abszissen (1 km = 2 mm), die Höhen als Ordinaten (100 m = 1 cm) einzutragen.

15. Steigungsverhältnisse der Gotthardbahn von Luzern bis Bellinzona.

Entfernung in km (abgerundet)	Station	Höhe in m
0	Luzern	438
28	Arth-Goldau . . .	513
36	Schwyz-Seewen . .	458
40	Brunnen	440
51	Flüelen	437
54	Altdorf	454
61	Erstfeld	475
65	Amsteg-Silenen .	522
82	Wassen	930
89	Göschenen . . .	1109
105	Airolo	1144
112	Ambri-Piotta . .	991
117	Rodi-Fiesso . . .	945
125	Faido	721
151	Biasca	296
170	Bellinzona	244

1 km = 1 mm; 100 m = 1 cm der Darstellung.

16. C macht folgende Reise in der Schweiz:

1. Tag. Von Weggis (437 m) Besteigung des Rigi (1800 m). Rast in Altdorf (454 m).
2. Tag. Besuch der Tellsplatte (512 m). Über Göschenen (1109 m) nach Andermatt (1144 m).
3. Tag. Besteigung des Furkapasses (2436 m).
4. Tag. Abstieg nach Gletsch (1761 m).
5. Tag. Besteigung der Grimsel (2164 m). Abstieg nach Guttannen (1060 m).
6. Tag. Über Interlaken (568 m) nach Grindelwald (1037 m).
7. Tag. Ruhetag.
8. Tag. Besteigung des Faulhorn (2684 m). Rückkehr nach Grindelwald.
9. Tag. Ruhetag.
10. Tag. Besteigung der Kleinen Scheidegg (2064 m). Wengernalp (1878 m).

11. Tag. Ruhetag.
12. Tag. Über Lauterbrunnen (797 m) nach Bern (546 m).
Trage die Tage als Abszissen (Tagesabstand = 1 cm), die Höhen der Aufenthaltsorte als Ordinaten (200 m = 1 cm) ein und zeichne die Kurve.

IV. Multiplikation mit eingliedrigem Multiplikator.

§ 10.

Multiplikation von Produkten und Summen.

1. Bilde das Produkt der Zahlen:
a) x und y; b) 3 und 5; c) 5,2a und 6,3b; d) $3\frac{1}{2}$d und $\frac{4}{7}$e.

2. Multipliziere:
a) 5 kg mit 3; b) 6 m mit 4; c) 4,5 *M* mit 2; d) $7\frac{1}{2}$ cm mit 10.

3. Wie heißt das Produkt der Größen:
a) 3a; 4b und 5c; b) 0,2m; 0,3n und 0,1p;
c) $\frac{1}{2}$r; $\frac{2}{3}$s und 6t; d) $2\frac{1}{4}$x; 4y und $1\frac{2}{3}$z?

4. Wie schreibt man das Produkt $4 \cdot 2$ *M* in Form einer Summe?

5. Das Produkt der Zahlen $3 \cdot 5$ als Summe zu schreiben:
a) 5 sei Multiplikator; b) 3 sei Multiplikator.

6. Ein Onkel schenkt seiner Nichte zu jedem Geburtstage a *M*.
1) Wieviel *M* hat er ihr in b Jahren geschenkt?
2) Setze a = 5; b = 4 und stelle die Summe zeichnerisch dar.

7. Welche Strecke legt ein Automobil in x Stunden zurück, wenn es durchschnittlich mit einer Geschwindigkeit von y km in der Stunde fährt? Für x den Wert 8, für y den Wert 60 zu substituieren und die Strecke graphisch darzustellen.

8. Berechne unter Anwendung des kommutativen Gesetzes auf sechs Arten das Produkt der Zahlen:
a) 2; 5; 7; b) 3; 4; 1; c) 0,1; 0,2; 0,3; d) $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{5}$.

9. $2(a + b)$. **10.** $a(m - n)$. **11.** $3(x - y)$.
12. $(1 + c)v$. **13.** $(a - 1)b$. **14.** $(a - b + c)4$.
15. $7(a - 1 + b)$. **16.** $a(b + c)$. **17.** $(a - b + c)d$.
18. $13(a + b - c)$. **19.** $3(x + y - z)$. **20.** $2(x - y - z)$.
21. $(a - b + c)7$. **22.** $m(x + y - z)$. **23.** $c(b + x - y)$.
24. $x(q + r + p)$. **25.** $(a - b - c)x$ **26.** $(x - y + z)a$.
27. $n(b + c - d)$. **28.** $(a + b - c)z$. **29.** $a(b + c - d)$.
30. $(q - p - r)y$.

Berechne Nr. 31 bis 36 auf dieselbe Weise wie die voraufgehenden Aufgaben:

31. a) $6 \cdot 72$ b) $5 \cdot 37$ c) $4 \cdot 86$.
32. a) $8 \cdot 36$ b) $6 \cdot 58$ c) $9 \cdot 78$.
33. a) $3 \cdot 234$ b) $5 \cdot 114$ c) $3 \cdot 249$.
34. a) $4 \cdot 651$ b) $8 \cdot 351$ c) $7 \cdot 624$.
35. a) $6 \cdot 1250$ b) $2 \cdot 2086$ c) $5 \cdot 9042$.
36. a) $2 \cdot 98$ b) $3 \cdot 197$ c) $5 \cdot 299$.

---

37. $xy \cdot 5$. **38.** $3x \cdot 7$. **39.** $8x \cdot a$
40. $5y \cdot z$. **41.** $7abx \cdot c$. **42.** $12ay \cdot x$.
43. $5a \cdot 8b$. **44.** $7d \cdot 11f$. **45.** $18x \cdot 5y$.
46. $23z \cdot 7y$. **47.** $42mn \cdot 3x$. **48.** $35ac \cdot 2b$.
49. $14xz \cdot 5y$. **50.** $52ab \cdot 4cd$. **51.** $25pq \cdot 12xy$.

Berechne Nr. 52 bis 60 auf dieselbe Art wie Nr. 37 ff.

52. $43 \cdot 30$. **53.** $57 \cdot 200$. **54.** $96 \cdot 3000$.
55. $0{,}3 \cdot 400$. **56.** $0{,}71 \cdot 5000$ **57.** $1{,}452\,kg \cdot 200$.
58. $3{,}14\,m \cdot 600$. **59.** $2{,}45\,ℳ \cdot 7000$. **60.** $3{,}25\,qm \cdot 300$.

---

61. $(3a - 5b + 2c)4$. **62.** $(2x + 7y - 3z)3$.
63. $(3x + 5y - 4z)3$. **64.** $(3a - 2b + 5m)2p$.
65. $(5a + 2b)0$. **66.** $9z(3x - 7y)$.
67. $5xy(3a - 2b + 7c)$. **68.** $(4a - 3c + b)5$.
69. $(2b - 3ac + 1)5$. **70.** $20ax(3m - 4n + 5p)$.
71. $5b(2ax + 7cx - 5dx)$. **72.** $(6a + 5b + 3c)2d$.
73. $12(3n + 7p - 2q)$. **74.** $(5x - 2 + 4y - 3z)15a$.
75. $(5a - 12 + 4b)7cd$. **76.** $0{,}3(2a - 3b)$.
77. $(3x - y + 2z)1{,}2$. **78.** $0{,}01(5x - 3y + 7z)$.
79. $(0{,}5a + 0{,}6b - 0{,}7c)0{,}7$. **80.** $2{,}5(3a - 0{,}1 - 0{,}5b)$.
81. $(30x + 24y - 25z)0{,}003$ **82.** $\frac{11}{12}d(4a + 20b - 5c)$.
83. $(\frac{2}{3}a - \frac{2}{5}b - \frac{7}{12}c)1\frac{1}{2}$. **84.** $2\frac{1}{3}(-1\frac{1}{2}x + 2\frac{2}{3}y + 1\frac{2}{7}z)$.
85. $(\frac{3}{5}m + \frac{2}{3}n + \frac{5}{7}p) \cdot 1\frac{2}{3}$. **86.** $(1\frac{2}{5}a - 1\frac{1}{2}b + \frac{3}{4}c) \cdot \frac{3}{4}x$.
87. $(3\frac{1}{5}x + \frac{2}{3}y - 4\frac{1}{2}z) \cdot 1\frac{1}{3}$.

88. Welchen Wert hat das Produkt $5ab$ für:
1) $a = 3$; $b = 7$; 2) $a = 0{,}4$; $b = 0{,}5$;
3) $a = 1{,}2$; $b = 0{,}9$; 4) $a = 2\frac{1}{2}$; $b = 1\frac{2}{5}$?

89. Bestimme den Wert von $(x - y)5$ für:
1) $x = 75$; $y = 36$;
2) $x = 65{,}4$; $y = 32{,}1$;
3) $x = 8\frac{1}{4}$; $y = 3\frac{1}{10}$.

90. Den Wert des Produktes $(2a + 3b + 4c)d$ zu bestimmen für:
1) $a = 10$; $b = 7$; $c = 5$; $d = 2$;
2) $a = 12$; $b = 0$; $c = 8$; $d = 10$.

91. Setze 1) $x = 0{,}4$; $y = 0{,}2$; $z = 0{,}3$; $a = 0{,}1$;
2) $x = \frac{3}{4}$; $y = \frac{5}{7}$; $z = \frac{4}{5}$; $a = \frac{2}{3}$
und berechne den Wert von $(8x - 7y + 15z)3a$.

---

§ 11.

Multiplikation relativer Größen.

1. $(-5a)\cdot(+6)$.
2. $(+25c)\cdot(-3)$.
3. $(+3x)\cdot(-4y)$.
4. $(+21xy)\cdot(-2a)$.
5. $(-15ac)\cdot(-4b)$.
6. $(-6)\cdot(+6cd)$
7. $(-13c)\cdot(-2ab)$.
8. $(+15ax)\cdot(-3bc)$.
9. $(-9xy)\cdot(-7ac)$.
10. $(-13)\cdot(+41)$.
11. $(-5ac)\cdot(-5)$.
12. $(+12xy)\cdot(-3az)$.
13. $(+0{,}3a)\cdot(-0{,}5b)$.
14. $(-2{,}1x)\cdot(+1{,}5y)$.
15. $(+\frac{2}{3}m)\cdot(-\frac{4}{5}n)$.
16. $(-3\frac{1}{5}x)\cdot(-\frac{5}{8}y)$.
17. $(+a)\cdot(+b)\cdot(-c)$.
18. $(-3a)\cdot(+4b)\cdot(-5c)$.
19. $(+16)\cdot(-5)\cdot(+3)$.
20. $(+12x)\cdot(-5)\cdot(+3y)$.
21. $(-9bc)\cdot(+5a)\cdot(-3x)$.
22. $(+7ab)\cdot(-8c)\cdot(+2)$.
23. $(-4e)\cdot(+5d)\cdot(-3c)\cdot(-2b)$.
24. $(+7)\cdot(-4)\ (+5)\cdot(+3)$.
25. $(+6ab)\cdot(-2x)\cdot(-3)\cdot(+4y)$.
26. $(-8)\cdot(-10a)\cdot(-5)\cdot(+3x)$.
27. $(+3a)\cdot(-5b)\cdot(-3cd)\cdot(-2)$.
28. $(+0{,}2m)\cdot(-0{,}3n)\ (-0{,}4p)\cdot(+0{,}5q)$
29. $(-0{,}7a)\cdot(+0{,}5)\cdot(-0{,}3bc)\cdot(+1)$.
30. $(+2{,}1x)\cdot(-0{,}3y)\ (-1{,}1z)\cdot(+0{,}5)$.
31. $(+\frac{2}{3}ab)\cdot(-\frac{3}{4}c)\ (-\frac{5}{6})$.
32. $(-1\frac{1}{2}xy)\cdot(+2\frac{2}{3})\cdot(+3\frac{1}{4}z)$.
33. $(-\frac{5}{9}x)\cdot(+1\frac{1}{3}y)\cdot(-5)\cdot(-2\frac{1}{4}z)$.

---

34. $(3a - 5b) \cdot (-3)$.

35. $5 \cdot (2x - 3y)$.

36. $(8a + 7b) \cdot (-2c)$.

37. $(4x - 7y + 5z) \cdot (+6a)$.

38. $3(2a - 5b) - 4(5a + 3b)$.

39. $7(3x + 4y) + 2(5x - 9y)$.

40. $4x(3a - 5b) - 3x(5a - 3b)$.

41. $(5x - 2y)3c - (8x + 7y)5c$.

42. $(5m - 4n)3x - (9m + n)5x - (15m - 8n)x$.

43. $(4a + 3b)7 - (7a - 3b)2 + 3(5a - b)$.

44. $(2a + 3b)3x - (4a + 7b)5x + (3a + 4b)12x$.

45. $4x(6q - p) + 3q(2x - 1) - x(9q - 5p)$.

46. $0{,}5(0{,}3r - 0{,}2s) + 0{,}2(0{,}4r + 0{,}3s)$.

47. $0{,}3x(0{,}1x - 2{,}3y) - 2{,}3x(0{,}1 + 0{,}5y)$.

48. $(2{,}1m - 0{,}6n)0{,}5 - (0{,}03m + 1{,}5n)1{,}2$.

49. $\frac{3}{4}(8a - 1\frac{2}{3}b) - 2\frac{1}{2}(\frac{7}{10}a + 6b)$.

50. $(2\frac{1}{2}a + \frac{3}{4}b)1\frac{3}{5} - \frac{2}{5}(1\frac{2}{3}a - \frac{1}{2}b)$.

51. $3\frac{1}{5}x(\frac{5}{8}x - 1\frac{1}{4}y) + (\frac{2}{3}x - \frac{4}{9}y)2\frac{1}{4}y$.

52. Addiere $(5a + 3b)$ zu $(6a - 8b)$ und multipliziere die Summe mit (-3).

53. Subtrahiere das Vierfache von $(3x + 5y)$ von dem Dreifachen von $(4x - 5y)$.

54. Addiere das Dreifache von $(4x + 5y + z)$ zu dem Siebenfachen von $(2x - 3y + 7z)$.

55. Subtrahiere von $(20a + 17b - 11c)$ das Vierfache von $(5a + 6b - 3c)$.

56. Multipliziere $(11 + 7b - 15c)$ mit a und addiere zu dem Produkt das Zweifache von $a(1 - 3b + 7c)$.

57. $5a - 2[3(4a - 5b) - 2(3a - 7b)] + 9a$.

58. $(8a + 3b) - 5[-5a + 3(3b - 4a) - (7a - 2b)] + 52b$.

59. $6[2(2a - 3b) - 5(3a + 2b) + 10] + 3(12a + 12b) + 30$.

60. $12a - [13b - (25a - 11b) - (15b - 7a) - 4a] + 6(a - 4b)$.

61. $1{,}5r - 2s - [2{,}5t + 2(-3{,}2r + 2{,}5s) - 3(1{,}1t - 1{,}5s)] + 1{,}5r$.

62. $3{,}2x + 2[2{,}1y - (3{,}5z - 1{,}2x) - 3(1{,}3y + 2{,}5z) - 6{,}3x] - 5(6y - 3{,}4x)$.

63. $-4(\frac{1}{2}z + \frac{1}{4}y) - [(-\frac{1}{3}x - \frac{1}{5}z)15 + (\frac{1}{4}y - \frac{1}{3}z)12]$.

64. $\frac{1}{2}x - [(\frac{1}{3}y - \frac{1}{2}z)6 - 12(\frac{1}{3}x - \frac{1}{4}y)] - \frac{1}{2}(3y - z)$.

---

65. Berechne den Funktionswert $y = 2x$ für $x = 8$; $4{,}1$; $3\frac{1}{2}$; -3; $-2{,}5$; $-4\frac{1}{4}$; $2a$; $-5b$.

66. Wie groß ist die Funktion $2x - 7$ für $x = 10\frac{1}{3}$; $6{,}3$; $4\frac{1}{2}$; 0; $-1\frac{2}{3}$; $-5{,}4$; $-3{,}1a$; $-7\frac{1}{2}b$?

67. Den Wert der Funktion $y = 2a - 3x$ zu bestimmen für $x = -14$; -1; 0; 12; $-2a$; $13a$.

68. Wie groß wird die Funktion:

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ y = 3x + 10 \\ 2)\ y = 5x - 2 \\ 3)\ y = 11 + 2x \\ 4)\ y = 25 - 4x \end{array}\right\} \text{für } x = -4 \text{ bis } x = +4?$$

69. Substituiere für x die Werte: 10; 5; $3c$; 0; -7; $-6b$ und berechne $(10a - 7)2x$.

Siehe die Gleichungen § 27, Nr. 174 bis 196.

V. Potenzierung.

§ 12.

Übungen zum Begriff der Potenz.

1. Folgende Ausdrücke in Potenzform anzugeben:

1) $a \cdot a$; 2) $x \cdot x \cdot x$; 3) $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$;
4) $a \cdot x \cdot x$; 5) $a \cdot b \cdot a \cdot b \cdot a$; 6) $3 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 4$;
7) $0{,}2 \cdot 0{,}2$; 8) $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$; 9) $\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3}$.

2. Wie schreibt man als Produkt:

1) c^5; 2) 10^4; 3) xy^2;
4) $2 \cdot 3^3$; 5) a^2b^4; 6) $4^3 5^4$?

3. Stelle 16 dar: a) als Potenz von 4, b) als Potenz von 2.

4. Schreibe 64 als Potenz von 8, von 4 und von 2.

5. Welchen Wert hat die Potenz:

a) 4^2; b) 2^3; c) 5^2;
d) 10^3; e) 2^5; f) 9^2;
g) 2^8; h) 10^5; i) 7^3;
k) $0{,}2^6$; l) $0{,}05^3$; m) $1{,}2^2$;
n) $(\frac{1}{2})^5$; o) $(\frac{2}{5})^3$; p) $(1\frac{2}{3})^2$?

6. Was ist größer

a) 3^2 oder 2^3; b) 5^2 oder 2^5; c) 3^4 oder 4^3?

und um wieviel?

7. Welchen Wert hat die Potenz:

a) $(+1)^4$; b) $(-1)^4$; c) $(+2)^6$;
d) $(-3)^2$; e) $(-4)^2$; f) $(-5)^2$;
g) $(-2)^3$; h) $(-1)^3$; i) -2^5;
k) $-a^6$; l) $(-a)^5$; m) $(-a)^{2n}$;
n) $(-a)^{2n+1}$; o) $-a^{2n-1}$; p) $(-a)^n$?

8. Berechne:

a) $-(-2)^2$; b) $-(-2)^5$; c) $(-1)^{11}$;
d) $-(+6)^2$; e) $(-a)^8$; f) $-(-a)^{2n-1}$;
g) $-(-a)^{2n}$; h) -10^8; i) $-(-1)^{20}$.

9. Berechne und vergleiche den Wert von:

a) $(2x)^3$ und $2x^3$ für $x = 2$;
b) $(5a)^2$ und $5a^2$ für $a = -10$;
c) $(-4b)^3$ und $-4b^3$ für $b = 5$;
d) $(-3y)^4$ und $-3y^4$ für $y = -1$.

10. Veranschauliche durch eine Zeichnung, daß

1) $2^3 = 8$; 2) $3^2 = 9$; 3) $2^4 = 4^2$ ist.

Berechne den Wert der folgenden Summen:

11. $2^3 + 4^2$. **12.** $5^2 + 2^4$. **13.** $8^2 - 7^2$.
14. $3^2 + 4^3 + 2^4$. **15.** $8^2 - 5^2 - 7^2$. **16.** $2^6 - 3^3 + 4^2$.
17. $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2$. **18.** $-1^2 + 2^2 - 3^2 + 4^2 - 5^2$
19. $2^3 + (-4)^2$. **20.** $(-3)^3 + (-5)^3$.
21. $(-8)^2 - (-2)^6$. **22.** $(-1)^9 + (+1)^8 - (-1)^7$.
23. $3 \cdot 2^2 - 2 \cdot 1^7 - 10^2$. **24.** $2 \cdot 5^2 + 3 \cdot 2^5 + 5 \cdot 3^2$.
25. $8 \cdot 2^3 - 8^2 + 1^{13}$. **26.** $5 \cdot 6^2 + 4(-3)^2 + 8(-2^3)$.
27. $6 \cdot 4^3 - 7(-5)^2 - 9 \cdot 3^3$. **28.** $2 \cdot 0{,}3^2 - 3 \cdot 0{,}2^3 + 4 \cdot 0{,}1^2$.
29. $6 \cdot (\frac{1}{2})^3 - 2(\frac{2}{3})^2 + 5(\frac{5}{6})^2$.

---

§ 13.

Addition und Subtraktion von Potenzen.

1. $6a^3 + 2a^3 + 11a^3$. 2. $5b^5 + 12b^5 + 13b^5$.
3. $28a^7 - 13a^7 + 35a^7$. 4. $44a^5 + 33a^5 - 55a^5$.
5. $25a^9 - 16a^9 + 10b^9 + 11a^9$. 6. $3ax^5 + 21ax^2 - 14ax^5 + 15ax^2$
7. $3x^2y - x^2y + 5xy^2 - 3xy^2$. 8. $1{,}25b^4 + 2{,}36b^4 - 1{,}31b^4$.
9. $5{,}42b^7 - 3{,}24b^7 + 6{,}51b^7 - 8{,}19b^7$.

10. $\frac{3}{4}b^{11} + \frac{2}{3}b^{11} - \frac{5}{12}b^{11}$.
11. $2\frac{3}{5}x^5 - 1\frac{1}{4}x^5 + 3\frac{3}{4}x^5 - 1\frac{4}{5}x^5$.
12. $\frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{5}y^3 - \frac{1}{4}x^3 - \frac{1}{10}y^3$.
13. $\frac{7}{8}x^2y^2 - \frac{7}{10}xy^2 - \frac{3}{4}x^2y^2 + \frac{3}{5}xy^2$.
14. $5 \cdot 3^3 + 7 \cdot 3^2 - 8 \cdot 3^3 - 5 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3^3$.
15. $7 \cdot 2^4 + 4 \cdot 4^2 - 3 \cdot 2^4 + 2 \cdot 4^2$.
16. $6 \cdot 0{,}2^3 + 5 \cdot 0{,}1^5 - 2 \cdot 0{,}2^3 - 2 \cdot 0{,}1^5$.
17. $20 \cdot (\frac{1}{2})^2 - 50 \cdot (\frac{1}{5})^2 - 48 \cdot (\frac{1}{2})^2 + 75 \cdot (\frac{1}{5})^2$.
18. Substituiere für a den Wert 2 und berechne:
    1) $3a^2 + 5a^2$; 2) $5a^3 - 3a^3$;
    3) $12a^2 + 5a^3$; 4) $9a^2 + 2a^3$.
19. Berechne $5x^2y^3 + 3x^3y^2$ für:
    1) $x = 2$; $y = 3$; 2) $x = 3$; $y = 2$;
    3) $x = 4$; $y = 1$; 4) $x = 1$; $y = x$.
20. $8a^2 - (5a^2 - 3a^2) + (6a^2 - 7a^2)$.
21. $25a^5 - [18a^5 - (13a^5 + 21a^5) + (18a^5 - 22a^5)]$.
22. $33x^4 - (18x^4 + 7x^4) - [(27x^4 - 15x^4) - (19x^4 + 36x^4)] + (48x^4 - 13x^4)$.

---

23. $25a^5 - 13a^6 - [20a^6 - 3(5a^5 - 6a^6) + 17a^5] - (57a^5 - 62a^6)$.
24. $6x^7 - [(-5x^5 + 3x^9) + (8x^7 - 9x^{11})] - (-7x^5 - 3x^7) + 6(x^9 + x^5)$.
25. $3a^3 + (5b^3 - 2a^3) - [7a^3 - (6b^3 - 5a^3) - 9b^3] + 5(4a^3 - b^3)$.
26. $8x^5 - [3y^7 - (5x^5 + 2y^7) - 7x^5] - 9x^5 + 3(4y^7 - 3x^5) - 8y^7$.

---

§ 14.

Multiplikation von Potenzen.

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

1. $a^3 \cdot a^5$.
2. $a^{18} \cdot a^{21}$.
3. $a^7 \cdot a^{15}$.
4. $x^{11} \cdot x^8$.
5. $x^9 \cdot x^4$.
6. $x^p \cdot x^q$.
7. $p^2 \cdot (-p)^3$.
8. $(-p)^2 \cdot (-p)^5$.
9. $(-p)^{2n} \cdot (-p)^{2n+2}$.
10. $m^5 \cdot m^3 \cdot m^4$
11. $m^7 \cdot m^{20} \cdot m^{19}$.
12. $y^8 \cdot y^3 \ y^4 \cdot y^5$.
13. $y^9 \cdot y^{11} \cdot y^5 \cdot y^2$.
14. $2^2 \cdot 2^3$.
15. $6^2 \cdot 6^3$.
16. $9^2 \cdot 9$.
17. $3^2 \cdot 3 \cdot 3^3$.
18. $3b^7 \cdot 4b^5$.
19. $2b^5 \cdot 3b^2 \cdot 7b^8$.
20. $9a^4 \cdot 5a^{11} \cdot (-a)^3$.
21. $\frac{2}{3}a^5 \cdot (-\frac{3}{4}a^2) \cdot \frac{1}{2}a^3$.
22. $3x^m \cdot 5x^n$.
23. $11x^m \cdot 4x^{n+1}$.
24. $a \cdot a^{2n-1}$.
25. $a^3 \cdot a^{n-5}$.
26. $a^{n+1} \cdot a^{n-1}$.
27. $a^{2n-1} \cdot (-a)^{2n}$.

28. $(-2d^{2a-3}) \cdot 5d^{3a+8}$.

29. $\frac{2}{3}d^{3a+1} \cdot \frac{3}{4}d^{a-1}$.

30. $y^{2a-3b} \cdot y^{4a-5b}$.

31. $y^{2a+5} \cdot y^{3a-7} \cdot y^{6-2a}$.

32. Berechne $a^3\ a^4$ für: 1) $a = 2$; 2) $a = 1$; 3) $a = -3$.

33. Wie groß ist $b^2 \cdot (-b)^3$ für $b = 3$?

34. Wie groß ist $(-3d^{m-1}) \cdot (2d^{m+1})$ für $d = 4$ und $m = 2$?

35. Berechne $x^{2a-3b} \cdot x^{4a-5b}$ für $a = 2$; $b = 1$; $x = 3$.

36. $3a^2b^3 \cdot 4a^2b^4$.

37. $9a^3b^5 \cdot 6a^4b^2$.

38. $5x^2y^5 \cdot 7x^4y^3$.

39. $\frac{4}{5}x^3y \cdot \frac{3}{4}x^2y^4$.

40. $\frac{3}{8}p^3q^3 \cdot \frac{2}{5}pq^6 \cdot \frac{10}{11}p^5q$.

41. $1\frac{1}{2}p^{n+2} \cdot 1\frac{1}{3}p^{2n-1} \cdot 2\frac{1}{2}p^2$.

42. $2a^3bc^2 \cdot 4a^2b^2c$.

43. $8ab^3c^7 \cdot 7a^2b^5c^3$.

44. $4x^2y^3z \cdot 2x^5y^2z^3 \cdot 3x^3yz^5$.

45. $5x^7yz^3 \cdot 3x^2y^2z^5 \cdot 6xy^5z^2$.

46. $\frac{2}{3}a^7b^2c^3 \cdot 2a^3b^5c^2 \cdot \frac{3}{4}a^2b^7c^5$.

47. $2\frac{1}{4}a^4b^3c^6 \cdot \frac{4}{5}a^2bc \cdot 3\frac{1}{3}a^2b^5c$.

48. Substituiere 3 für a, 2 für b, 1 für c und bestimme den Wert von $2ac^3 \cdot 10ab^2$; $4a^2bc \cdot 2ab^3c^5$.

---

49. $3ab(2a^2 + 5b^2 + 3a^2b^2)$.

50. $3a^2b^3(7a^3 + 8a^2b + 6ab^2)$.

51. $(3ab^2 - 2a^3b^4 - a^5b^6)15a^3b^5$

52. $(0{,}2xy - 0{,}3y + 0{,}4y^2)22x^2y$.

53. $50xy(0{,}5xy^4 - 0{,}7x^2y^6 + 0{,}9x^6y^6)$.

54. $12a^{x+3}(\frac{3}{4}a^{2x-3} + \frac{2}{3}a^{3x-5} - \frac{5}{6}a^{2x+1})$.

55. $\frac{2}{3}a^{2x-1}(15a^{3x+2} - 9a^{3-2x} + 18a^{6-3x})$.

56. $7x^3 + 3x^2(5x^2 - 2x^3) - 5x^2(3x - 5x^2)$.

57. $3mn - 4mn(-2m^2n^2 + 3mn) + 2mn(3 - 4m^2n^2)$.

58. $5a^2b^2 - 3ab(2ab^2 - 5a^2b) - 10a^2(ab^2 - b^2)$.

59. $2a^2 - [5a^3 - 2a(3a^2 + 4a^3) - (-8a^4 - 6a^3)] + 3a^2$.

60. $9ab^2 - 5a^2b - [(8ab^2 - 5a^2b) - 3b(ab)]$.

$$a^{m+n} = a^m \cdot a^n.$$

61. a^5 als Produkt zweier Potenzen mit der Basis a und ganzzahligen positiven Exponenten darzustellen. Wieviel verschiedene Fälle sind möglich?

62. Berechne: 3^5; 4^4; 5^5; 10^5.

---

§ 15.

Potenzierung von Produkten und Potenzen.

$$(ab)^n = a^n \cdot b^n.$$

1. $(xy)^3$

2. $(xyz)^5$.

3. $(3xy)^m$.

4. $(3ab)^3$.

5. $(5a)^2$.

6. $(6abc)^3$.

7. $(0{,}2pq)^3$. 8. $(\frac{1}{3}pq)^4$. 9. $(\frac{3}{4}pq)^2$.
10. $(2b \cdot 3c)^2$. 11. $(0{,}8b \cdot 0{,}9c)^2$. 12. $(\frac{1}{2}b \cdot \frac{1}{3}c)^2$
13. $\frac{(2a)^4}{8}$. 14. $\frac{(5a)^3}{50}$. 15. $\frac{(10a)^3}{250}$.
16. Welchen Wert nimmt die Potenz $(xy)^3$ an für:
1) $x = 5$; $y = 2$; 2) $x = 2$; $y = 3$?
17. Berechne $\frac{(2a)^5}{16}$ für $a = 2$; $a = \frac{1}{2}$; $a = 4$.

$$a^n \cdot b^n = (ab)^n.$$

18. Gib die folgenden Ausdrücke als Potenz eines Produktes an:
1) $a^5 \cdot b^5$; 2) $a^2 \cdot b^2 \cdot c^2$; 3) $x^m \cdot y^m \cdot z^m$.
19. Berechne auf die einfachste Weise:
a) $2^3 \cdot 5^3$; b) $4^2 \cdot 3^2$; c) $4^4 \cdot 25^4$; d) $5^2 \cdot 20^2$
20. $\left(\frac{a}{b}\right)^5 \cdot \left(\frac{b}{c}\right)^5$. 21. $\left(\frac{a}{b}\right)^7 \cdot \left(\frac{b}{a}\right)^7$. 22. $\left(\frac{2a}{b}\right)^3 \cdot \left(\frac{b}{3c}\right)^3$.
23. $\left(\frac{x}{y}\right)^m \cdot \left(\frac{y}{z}\right)^m \cdot \left(\frac{z}{x}\right)^m$. 24. $\left(\frac{x}{z}\right)^m \cdot \left(\frac{x}{y}\right)^m \cdot \left(\frac{z}{x}\right)^m$. 25. $\left(\frac{y}{x}\right)^m \cdot \left(\frac{z}{x}\right)^m \cdot \left(\frac{x}{z}\right)^m$
26. $(\frac{5}{12})^5 \cdot (\frac{4}{5})^5 \cdot (\frac{3}{2})^5$. 27. $(1\frac{1}{2})^3 \cdot (1\frac{1}{3})^3 \cdot (2\frac{1}{2})^3$.
28. $\left(\frac{4b}{c}\right)^n \cdot \left(\frac{5c}{4b}\right)^n \cdot \left(\frac{3c}{5b}\right)^n$. 29. $\left(\frac{4b}{5c}\right)^n \cdot \left(\frac{3d}{8b}\right)^n \cdot \left(\frac{10c}{3d}\right)^n$.

$$(a^n)^p = a^{np}.$$

30. $(a^3)^2$. 31. $(a^5)^3$. 32. $(a^{11})^4$. 33. $(b^5)^x$.
34. $(b^7)^7$. 35. $(b^x)^2$ 36. $(c^{3y})^5$. 37. $(c^4)^{2y}$.
38. $(c^{x+1})^3$. 39. $(2d^3)^5$. 40. $(4d^2)^3$. 41. $(9d^5)^2$.
42. $(-a^3)^2$. 43. $(-a^2)^3$. 44. $(-a^5)^3$. 45. $(-x^2)^n$.
46. $(-x^2)^{n+1}$. 47. $(-x^2)^{2n+3}$. 48. $(y^m)^m$. 49. $(-y^m)^{m+1}$.
50. $(-y^5)^{m-2}$.
51. Wie groß ist $(-a)^{2n}$ für $a = 30$ und $n = 1$?
52. Wie groß ist $(a^m)^n$ für $a = 2$; $m = 4$; $n = 2$?
53. $(x^2y^3)^2$. 54. $(x^4y^3)^3$. 55. $(-x^3y)^7$. 56. $(a^3b^4)^x$.
57. $(ab^2)^{x+1}$. 58. $(a^2b^5)^{x-2}$. 59. $(2ab^2)^3$. 60. $(-5a^3b^4)^4$.
61. $(7a^2b^3)^2$. 62. $(-0{,}5p^3q^4)^3$ 63. $(0{,}2p^2q^3)^4$. 64. $(1{,}3p^3q^2)^2$.
65. $(\frac{1}{3}cd^2)^4$. 66. $(-\frac{1}{9}c^2d^2)^2$. 67. $(\frac{1}{2}c^2d^3)^6$. 68. $(2 \cdot 3^2)^2$.
69. $(2^3 \cdot 5)^3$. 70. $(4 \cdot 5^2)^4$.

71. Substituiere 3 für x; 1 für y und berechne $(x^3y^7)^2$.

72. Setze $p = 4$; $q = \frac{1}{2}$ und bestimme den Wert von $(p^2q^3)^5$.

73. $(2a^2b)^2 \cdot (3ab^2)^3$.

74. $(3ab^3)^3 \cdot (5a^2b^2)^2$.

75. $(2x^2y^2)^3 \cdot (2x^2y^3)^6$.

76. $(2xy^2)^2 \cdot (3x^2y)^3 \cdot (5x^3y^3)^2$.

77. $(\frac{2}{3}pq^2)^3 \cdot (\frac{3}{4}p^2q^2)^2$.

78. $(1\frac{1}{2}p^2q^2)^4 \cdot (1\frac{1}{3}p^3q^2)^2$.

$$a^{np} = (a^n)^p.$$

79. Stelle a^{24} als Potenz einer Potenz dar. Die Exponenten seien positive ganze Zahlen. Wieviel Fälle sind möglich?

80. Berechne: 2^8; 3^4; 10^8; 12^4.

---

81. Wie groß wird die Funktion

1) x^2 für $x = \pm 2; \pm 3; \pm 8; \pm 10; \pm 100$?

2) x^5 für $x = \pm 1; \pm 2; \pm 3$?

3) 2^x für $x = 1$ bis $x = 10$?

82. Berechne den Funktionswert y für:

1) $y = 2x^2 + 3x^3$ und $x = 5$.

2) $y = 5x^3 - 4x^2 + 3x - 2$ und $x = -2$.

3) $y = 2^x + 3^x$ und $x = 4$.

4) $y = 1 - 2^x + 3^x - 4$ und $x = 1$.

5) $y = 10^x - 15 + 20^x - 25$ und $x = 2$.

6) $y = x^5 \cdot x^2$ und $x = -2$ bis $+2$.

7) $y = a^{2x} \cdot (-a^{3x})$ und $x = 9; 4$.

8) $y = (ax)^3$ und $x = 5; -3; 1; 0; -7$.

9) $y = (a^3x^2)^2$ und $x = +2$ bis -2.

10) $y = (a^2b)^x$ und $x = 2; 7$.

VI. Multiplikation von Polynomen.

§ 16.

Multiplikation zweier Polynome.

1. $(a + b)(x + y)$.

2. $(3a - b)(2x - y)$.

3. $(a + 1)(a + 3)$.

4. $(n + 3)(n - 1)$.

5. $(2n + 2)(n - 3)$.

6. $(5m - 2n)(3m + 4n)$.

7. $(3r + s)(3r - 2s)$.
8. $(7q + 5p)(4q - 1)$.
9. $(8b - 7c)(6b - 5c)$.
10. $(13u - 2v)(4u + 7v)$.
11. $(x + y + z)(x + y)$.
12. $(a + b - c)(b - c)$.
13. $(3m + 2n - p)(2n + 3p)$
14. $(2a - 3b + 5c)(7a - 4b)$
15. $(11p - q + 2r)(4q - 5r)$.
16. $(13x + 4y - z)(5x - 1)$.
17. $(2m + 3n + 4r)(4m - 3n - 2r)$.
18. $(5x - 7y + 9z)(-3x + 5y - 4z)$.
19. $(2a^2 - 5b + 7)(5a^2 + 6b - 3)$
20. $(5x^2 - 2x + 1)(7x^2 + 3x - 1)$.
21. $(2x^2 + 3y + 5)(11x^2 - 8y - 9)$
22. $(5x^3 - 2x^2 + x)(3x^2 - 7x - 1)$.
23. $(7x^2 + 10x - 6)(x^2 - 15x + 8)$
24. $(2ac^2 - 5 + 3a)(7ac + 6 - 3c^2)$.
25. $(5a^2 - 7b - 3)(-16a^2 - 5b + 3)$.
26. $(15x + 19y - 3z)(7x - 5y + 9z)$.
27. $(22a - 17b + 5c)(3a + 11b - 4c)$.
28. $(-5a^2 + 3b - 7bx)(2a - 8 + 5b^2)$.
29. $(7x^2 - 5xy + 3y^2)(8x^2 + 9xy - 11y^2)$.
30. $(0{,}3a - 0{,}2b)(0{,}4a + 0{,}3b)$.
31. $(0{,}7c + 0{,}5d)(0{,}6c + 0{,}1d)$.
32. $(1{,}5x - 2{,}1y)(0{,}3x - 1{,}2y)$.
33. $(0{,}6x + 1{,}1y)(3{,}2x - 2{,}5y)$.
34. $(0{,}2x - 0{,}3y - 0{,}4z)(0{,}7x + 0{,}6y + 0{,}5z)$
35. $(1{,}3m + 0{,}5n - 2{,}4p)(0{,}3m - 0{,}2n + 0{,}7p)$.
36. $(0{,}02x + 0{,}3y - 0{,}5)(1 - 0{,}4x - 0{,}03y)$.
37. $(\frac{1}{2}a + \frac{1}{3}b)(\frac{2}{5}a - \frac{3}{4}b)$
38. $(\frac{2}{3}a - \frac{1}{5}b)(3a + 2\frac{1}{2}b)$.
39. $(\frac{2}{3} - \frac{1}{2}m + 1\frac{1}{2}n)(1\frac{1}{2} + \frac{1}{3}m - \frac{2}{3}n)$.
40. $(\frac{1}{3}x + \frac{1}{2}y - \frac{2}{3}z) \cdot (\frac{1}{2}x - 1\frac{1}{3}y + 1\frac{1}{2}z)$
41. $(\frac{5}{7}x - 2\frac{1}{2}y + \frac{3}{4}z)(2\frac{4}{5}x + \frac{2}{5}y - 1\frac{2}{3}z)$.
42. $(\frac{3}{5}a + \frac{2}{3}b - \frac{3}{4}c)(1\frac{2}{3}a - b + 1\frac{1}{4}c)$.
43. $(\frac{3}{4}x + 1\frac{1}{2}y - 2z)(\frac{4}{3}x - \frac{2}{5}y + z)$.

---

44. $(2a + b - 3c)(a + 2b) - (a - 2b + 3c)(2a + c)$.
45. $(4a + 5b + c)(a - 3b + 2c) + (3a - 4b + 3c)(a - 2b)$
46. $(5x - 6y + 2z)(2x + y - 5z) - (10x - 2y + z)(x + 6y - z)$

47. $(3x + 2y + z)(3x + 2y - z) - (7x - 3y + 2z)(7x + 3y - 2z)$.

48. $(0{,}2m + 0{,}3n)(0{,}5p - 0{,}4q + 0{,}3r) + (-0{,}2p + 0{,}1q - 0{,}4r)$ $(0{,}5m + n)$.

49. $(0{,}3a + 0{,}2b - 0{,}5c)(0{,}5a - 0{,}3b + 0{,}1c) - (0{,}6a + 3b - 2{,}1c)$ $(1{,}2a - 0{,}01b + c)$.

50. $(\frac{2}{3}x + 1\frac{1}{3}y - 2\frac{1}{2}z)(1\frac{1}{2}x + \frac{3}{4}y - \frac{2}{5}z) + (\frac{5}{3}x + \frac{17}{6}y)\frac{17}{20}z$.

51. $(\frac{3}{4}x - \frac{1}{2}y + \frac{1}{3}z)(1\frac{1}{3}x - 2y + 3z) + (\frac{13}{2}y - 3z)(\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}z)$.

52. Multipliziere $(5x + 7y)$ mit $(6x - 5y)$ und subtrahiere das Produkt von $30x^2 + 17xy + 36y^2$.

53. Addiere zu $12a^2 - 30ab + 5b^2$ das Produkt der Polynome $(4a + 5b)$ und $(b - 3a)$.

54. Subtrahiere $(5x^2 - 12xy + 48)$ vom Produkt der Polynome $(2x + 3)$ und $(3x + 16)$.

Siehe die Gleichungen § 27, Nr. 197 bis 213.

---

§ 17.

Besondere Fälle der Multiplikation von Polynomen.

1. $(x + y)^2$. 2. $(x - y)^2$. 3. $(2x + 3y)^2$.
4. $(4a + 5b)^2$. 5. $(3m - 4n)^2$. 6. $(5a - 6b)^2$
7. $(6x^2 + 7y)^2$. 8. $(9u - 11v^2)^2$ 9. $(7a + 5)^2$.
10. $(9m - 11)^2$. 11. $(13 - 3x)^2$. 12. $(8y + 1)^2$.
13. $(1 - 10a)^2$. 14. $(4a^2 + 7b)^2$. 15. $(2a^3 + 3a^2)^2$.
16. $(5m^2 - 2n^3)^2$. 17. $(7x^3 - 8y^5)^2$. 18. $(9p^4 + 11)^2$.
19. $(12 - 7q^5)^2$. 20. $(3ab^2 + 2a^2b)^2$. 21. $(4p^2q + 5pq^4)^2$.
22. $(7x^5 - 3y^4)^2$. 23. $(6u^3v + 15)^2$. 24. $(13 - 9b^2c^3)^2$.
25. $(0{,}3x - 0{,}2y)^2$. 26. $(0{,}7a + 0{,}8b)^2$. 27. $(1{,}5m^2 + 0{,}9n)^2$.
28. $(1{,}7r - 1{,}4s)^2$. 29. $(\frac{3}{4}a + \frac{2}{5}b)^2$. 30. $(\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}y)^2$.
31. $(\frac{4}{5}m - 1)^2$. 32. $(2\frac{1}{2}x + 3\frac{1}{3}y)^2$.

33. Berechne unter Anwendung derselben Formeln:
a) 31^2; b) 79^2; c) 97^2; d) 68^2; e) 111^2; f) 285^2; g) $3{,}2^2$; h) $7{,}6^2$; i) $40{,}3^2$.

---

34. $(x + y)(x - y)$. 35. $(a - 2b)(a + 2b)$.
36. $(3a + b)(3a - b)$. 37. $(3a + 2b)(3a - 2b)$.
38. $(5r + 7s)(5r - 7s)$. 39. $(2x - 3y)(2x + 3y)$.
40. $(8a + 9b)(8a - 9b)$. 41. $(13x + 11)(13x - 11)$.

42. $(5 - 4a)(5 + 4a)$
43. $(12a + 1)12a - 1)$.
44. $(9x + 15y)(9x - 15y)$.
45. $(7 + 5m)(7 - 5m)$.
46. $(14x + 10)(10 - 14x)$.
47. $(11 - 9a)(9a + 11)$.
48. $(2a^2 + 3b^2)(2a^2 - 3b^2)$.
49. $(5x^3 - 4y^3)(5x^3 + 4y^3)$.
50. $(b^4 - 5)(b^4 + 5)$.
51. $(12 - a^5)(12 + a^5)$.
52. $(3c^3 - 2d^4)(3c^3 + 2d^4)$.
53. $(7ab^2 + 5c^2)(7ab^2 - 5c^2)$
54. $(6x^2y^3 - 11xy^2)(6x^2y^3 + 11xy^2)$
55. $(0{,}2a + 0{,}3b)(0{,}2a - 0{,}3b)$.
56. $(1{,}1x - 1{,}2y)(1{,}1x + 1{,}2y)$.
57. $(1{,}9r + 1{,}7s)(1{,}9r - 1{,}7s)$
58. $(1{,}5 - 0{,}8x)(0{,}8x + 1{,}5)$.
59. $(\frac{2}{3}a + \frac{3}{4}b)(\frac{2}{3}a - \frac{3}{4}b)$.
60. $(\frac{5}{6}x - \frac{1}{2}y)(\frac{5}{6}x + \frac{1}{2}y)$.
61. $(1\frac{2}{3}p - \frac{2}{5}q)(\frac{2}{5}q + 1\frac{2}{3}p)$
62. $(2\frac{1}{4}xy + 3\frac{1}{2}z)(2\frac{1}{4}xy - 3\frac{1}{2}z)$.

63. Berechne unter Anwendung derselben Formel:

a) $31 \quad 29$; b) $48 \cdot 52$; c) $57 \cdot 63$; d) $98 \cdot 102$;
e) $69x \cdot 71y$; f) $28a \cdot 32b$; g) $117r \cdot 123s$.

64. Den Wert folgender Funktionen zu bestimmen:

1) $y = a^2 - 2ab + b^2 - x^2$ für $x = a - b$; $a + b$;
2) $y = (a^2 - b^2)x$ für $x = a + b$; $a - b$; $a^2 + b^2$.

---

65. $(x + y + z)^2$.
66. $(x - y - z)^2$.
67. $(x + y - z)^2$.
68. $(x - y + z)^2$.
69. $(2a + 3b + 4)^2$
70. $(5 - 3a - 2b)^2$.
71. $(2x + 3y + 5z)^2$.
72. $(3a + 4b + 2c)^2$.
73. $(5m - 3n + p)^2$.
74. $(7q^2 + 5q - 3)^2$.
75. $(5a - 4b + c)^2$
76. $(6x + 9y - 8z)^2$.
77. $(4q - 9r - 5s)^2$.
78. $(12x^2 + 15x - 17)^2$.
79. $(0{,}3a + 0{,}2b + 0{,}5c)^2$.
80. $(0{,}7m^2 - 0{,}8m - 0{,}1)^2$.
81. $(1{,}1x - 1{,}2y + 1{,}3z)^2$.
82. $(1{,}5a + 1{,}4b - 1{,}7c)^2$.
83. $(\frac{2}{3}x + \frac{1}{4}y - \frac{1}{2}z)^2$.
84. $(\frac{4}{5}a^2 - \frac{2}{3}a - \frac{3}{4})^2$.
85. $(\frac{5}{6}p^2 + \frac{1}{3}p - \frac{1}{5})^2$.
86. $(\frac{2}{5}r + \frac{1}{2} - \frac{3}{4}r^2)^2$.

---

87. $(x + y)^3$.
88. $(x - y)^3$.
89. $(2a + b)^3$.
90. $(b - 3)^3$.
91. $(a + 3)^3$.
92. $(2n - 5)^3$.
93. $(4 - b)^3$.
94. $(2x + 1)^3$.
95. $(3x + 2y)^3$.
96. $(4a + 3b)^3$
97. $(5m - 3n)^3$.
98. $(4r - 5s)^3$.
99. $(b + 0{,}3)^3$
100. $(2a - 0{,}1)^3$
101. $(\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y)^3$.
102. $(\frac{2}{3}a - \frac{3}{5}b)^3$.

---

103. $(2a + 3b)^2 - (3a - 5b)^2 + (6a - 5b)(6a + 5b)$.
104. $(7x - 3y)^2 + (3x - 5y)(3x + 5y) - (4x + y)^2$.

105. $(5a - 3)^2 + (5 - 3b)^2 - (2a + 5)(2a - 5)$.

106. $(4r + 3s)(4r - 3s) + (6r - 5s)^2 - (2r + 5s)^2$.

107. $(0{,}2a + 0{,}5)^2 - (0{,}3a - 0{,}2)^2 + (0{,}3 + a)(0{,}3 - a)$.

108. $(\frac{2}{3}x + \frac{1}{2}y)^2 - (\frac{3}{4}x + \frac{2}{5}y)(\frac{3}{4}x - \frac{2}{5}y) + (\frac{1}{4}x - \frac{3}{5}y)^2$

109. $(2a + 3b - 7c)^2 - (3a - b + 5c)^2$.

110. $(5x^2 - x + 3)^2 + (x - 3x^2 - 7)^2$.

111. $(0{,}5r + 1{,}2s + t)^2 - (0{,}2r - 0{,}5s + 1{,}1t)^2$.

112. $(3x + 4y)(3x - 4y)(9x^2 + 16y^2)$.

113. $(5a - 2b)(25a^2 + 4b^2)(5a + 2b)$.

114. $(64m^2 - 49n^2)(8m - 7n)(8m + 7n)$.

115. $(9x - 6y)(6y + 9x)(81x^2 - 36y^2)$.

116. $(0{,}3x + 0{,}4y)(0{,}09x^2 - 0{,}16y^2)(0{,}3x - 0{,}4y)$.

117. $(0{,}1b + 0{,}5a)(0{,}5a - 0{,}1b)(0{,}25a^2 - 0{,}01b^2)$.

118. $(\frac{3}{4}r - \frac{2}{3}s)(\frac{9}{16}r^2 - \frac{4}{9}s^2)(\frac{3}{4}r + \frac{2}{3}s)$.

119. $(\frac{4}{9}x^2 - \frac{1}{4}y^2)(\frac{2}{3}x - \frac{1}{2}y)(\frac{1}{2}y + \frac{2}{3}x)$.

120. $(5x + 4y - z)(5x + 4y + z)$.

121. $(2a^2 + 5a - 7)(2a^2 + 5a + 7)$.

122. $(3x - 2y + 5z)(3x + 2y - 5z)$.

123. $(6r^2 + 5r - 4)(6r^2 - 5r + 4)$.

Siehe die Gleichungen § 27, Nr. 214 bis 236

VII. Division.

§ 18.

Division von Produkten und Summen.

1. Teile a) $15a$ durch 3; b) $25{,}5m$ durch 5; c) $2\frac{1}{10}x$ durch $1\frac{2}{5}$

2. Bilde den Quotienten:

a) aus dem Dividendus	p	und dem Divisor	q;
b) „ „ „	q	„ „ „	p;
c) „ „ „	$48a$	„ „ „	$12a$;
d) „ „ „	$85abc$	„ „ „	$17bc$;
e) „ „ „	$33{,}9xy$	„ „ „	$0{,}3$;
f) „ „ „	$6{,}44z$	„ „ „	$0{,}7z$;
g) „ „ „	$\frac{2}{3}b$	„ „ „	$3c$;
h) „ „ „	$4\frac{1}{5}cd$	„ „ „	$\frac{5}{7}c$.

3. Wie lautet a) die Summe, b) die Differenz, c) das Produkt, d) der Quotient der Größen:
1) x und y; 2) 12a und 3a; 3) 4b und 20c?

4. Dividiere: a) 24a durch 4; b) 18b durch 6b; c) 45,5q durch 5x.

5. Welche Zahl muß man
1) mit 3a multiplizieren, um 12a zu erhalten?
2) „ 7x „ „ 35x „ „
3) „ a „ „ b „ „
4) „ $\frac{n}{m}$ „ „ n „ „

6. Beweise durch Divisionsprobe, daß
a) $30c : 5c = 6$; b) $24a : 6 = 4a$; c) $54x : 9y = \frac{6x}{y}$ ist.

7. Welche Zahl muß man durch $\frac{n}{a}$ dividieren, um n zu erhalten?

8. Welche Zahl gibt den Quotienten 6, wenn man sie:
a) durch x; b) durch 2a; c) durch 2,3n dividiert?

9. Ermittele durch eine Gleichung die Zahl, die a) durch 7, b) durch c, c) durch 5a dividiert **1.)** den Quotienten 8; **2.)** $\frac{b}{c}$; **3.)** 6b ergibt

10. Bestimme durch graphische Darstellung, wie oft
1) 3 in 12; 2) $2\frac{1}{2}$ in 10; 3) 5 in 16 enthalten ist.

11. Den Wert des Quotienten $\frac{a}{b}$ graphisch zu bestimmen für:
1) $a = 15$; $b = 3$; 2) $a = 7$; $b = 3$; 3) $a = 6$; $b = 1\frac{1}{2}$.

12. Durch welche Zahl muß man
1) 45x dividieren, um 15x zu erhalten?
2) 35a „ „ a „ „
3) 63ab „ „ 7b „ „
4) $\frac{a}{b}$ „ „ $\frac{1}{b}$ „ „

13. A. spart in n Jahren zusammen a ℳ. a) Wieviel hat er im Durchschnitt jährlich gespart? b) Wieviel betrug B.s jährliche Ersparnis, wenn dieser 1 Jahr länger gebraucht hätte, um a ℳ zu erübrigen? c) Setze $a = 1200$, $n = 3$ und löse die beiden Aufgaben zeichnerisch.

14. Teile c Aprikosen unter a Kinder. a) Wieviele erhält jedes Kind? b) Wieviele würde es erhalten, wenn sich noch drei andere Kinder in die Früchte zu teilen hätten? c) Den Wert 18 für c und 6 für a zu substituieren und die Aufgaben graphisch zu lösen.

15. Den Dividendus zu berechnen.

Divisor:	Quotient:
a) $3a$	$5b$;
b) $5{,}2bx$	$0{,}3x$;
c) $\frac{3}{4}y$	$\frac{4}{5}y^2$.

16. Setze $m = n$; $p = 5$ und bestimme den Wert von $\frac{m - n}{p}$.

17. Welchen Wert hat $\frac{c - d}{c}$ für $c = 5$; $d = 1$?

18. Wie groß ist $\frac{3x - 2y}{2x - y}$, wenn man $x = y$ setzt?

---

19. $35a : 7$. 20. $48a : 12$. 21. $119c : 17$

22. $\frac{12b}{b}$. 23. $\frac{abc}{c}$. 24. $\frac{144p}{18}$.

25. $0{,}4c : 0{,}2$. 26. $0{,}85q : 0{,}17$. 27. $1{,}12m : 0{,}16$.

28. $\frac{3}{5}x : \frac{4}{3}$. 29. $\frac{4}{5}a : 16$. 30. $2\frac{2}{3}b : \frac{4}{5}$.

31. $85ab : 17a$. 32. $120pq : 15pq$. 33. $70xy^2 : 14y^2$.

34. $13x : 13x$. 35. $162cd : 18cd$. 36. $16pq : 0{,}4p$.

37. $\frac{4{,}5abc}{0{,}9ab}$ 38. $\frac{10{,}2rs}{1{,}7rs}$. 39. $2\frac{1}{5}abc : \frac{11}{15}abc$.

---

40. $\frac{6a \cdot 8b}{12}$. 41. $\frac{5c \cdot 9d}{15}$. 42. $\frac{25p \cdot 4q}{50p}$

43. $(8x \cdot 18y) : 12x$. 44. $(0{,}3c \cdot 0{,}4d) : 0{,}6$. 45. $\frac{0{,}8x \cdot 0{,}9y}{0{,}36xy}$.

46. $\frac{5 \cdot 0{,}7p \cdot 0{,}3}{0{,}21}$. 47. $(\frac{2}{3}a \cdot \frac{3}{8}b) : 1\frac{1}{8}ab$. 48. $(3\frac{3}{4}cd \cdot 3\frac{2}{5}e) : \frac{3}{8}de$.

49. $\frac{72xy}{12x \cdot 3y}$. 50. $\frac{135ab}{3b \cdot 5a}$ 51. $\frac{7{,}5mn}{0{,}5m \cdot 3n}$.

52. $9{,}6xy : (3y \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}2x.)$ 53. $168abc : (7ac \cdot 6b)$.

54. $8750mn : (5 \cdot 3m \cdot 5n)$. 55. $(104e \cdot 20f) : (13e \cdot 5f)$.

56. $3\frac{9}{25}cde : (7c \cdot \frac{4}{5}d)$. 57. $17\frac{1}{2}xy : (2\frac{1}{2} \cdot 2\frac{1}{3}x)$.

58. $(6y \cdot 3{,}5z) : (3y \cdot 0{,}7z)$. 59. $(5{,}4a \cdot 3{,}4b) : (8{,}5a \cdot 7{,}2c)$.

---

60. $(x - y) : a.$

61. $(y - z) : 1.$

62. $(6x + 6y) : 3$

63. $(15a + 20b) : 5.$

64. $\frac{85a - 34b + 102c}{17}.$

65. $\frac{12b - 9b + 11b}{b}.$

66. $\frac{36ab + 48ab + 72ab}{12b}.$

67. $\frac{75ax + 30ay - 105az}{15a}.$

68. $(66bc - 55cd) : 11c.$

69. $(136pq - 119pq) : 17pq.$

70. $(250xy - 625yz + 125y) : 125y.$

71. $(420xy + 700xz - 280xz) : 140x.$

72. $(15{,}5a + 20{,}5b + 35{,}5c) : 5.$

73. $(28{,}7a - 36{,}4b + 16{,}1c) : 7.$

74. $(48{,}8x + 65{,}2y - 80{,}4z) : 4.$

75. $(34{,}8ab + 40{,}8ab - 36ab) : 4b.$

76. $(+ 55{,}55pq + 33{,}33pq - 77{,}77pq) : 11{,}11pq.$

77. $(2{,}35bc + 7{,}45bc - 6{,}60bc) : 0{,}5b.$

78. $(\frac{3}{10}x - \frac{6}{7}y + \frac{3}{5}z) : 3.$

79. $(3\frac{1}{3}ab - 2\frac{1}{7}ad) : 5a.$

80. $(\frac{2}{3}pq - \frac{8}{9}q + \frac{4}{5}pq) : 2q.$

81. $(\frac{3}{5}xy - \frac{7}{10}xy - \frac{11}{25}xy) : \frac{1}{5}x.$

82. $(1\frac{1}{8}xy + 1\frac{1}{5}y - 2\frac{1}{4}yz) : \frac{3}{4}y.$

Berechne auf dieselbe Weise:

83. a) 36 : 3 b) 84 : 4 c) 98 : 7

84. a) 102 : 3 b) 145 : 5 c) 648 : 8.

85. a) 2350 : 25 b) 7063 : 7 c) 3528 : 9.

86. Welchen Wert hat der Quotient $\frac{ab}{c}$ für:

1) $a = 7;$ $b = 8;$ $c = 4;$
2) $a = 0{,}4;$ $b = 0{,}6;$ $c = 0{,}8;$
3) $a = \frac{2}{3};$ $b = \frac{3}{4};$ $c = \frac{5}{8}$?

87. Berechne den Wert von $\frac{4a + 5b}{3}$ für:

1) $a = 6;$ $b = 3.$ 2) $a = 2\frac{1}{4};$ $b = 2\frac{2}{5}.$

88. Setze: 1) $x = 7;$ $y = 4;$ $a = 2;$
2) $x = 1{,}2;$ $y = 0{,}5;$ $a = 0{,}3;$
3) $x = 2\frac{1}{2};$ $y = 1\frac{1}{3};$ $a = 3\frac{1}{5}$ und berechne $\frac{2x - 3y}{a}.$

89. Welchen Wert nimmt der Ausdruck $(3a - 5b + 8c) : x$ an für:

1) $a = 11;$ $b = 15;$ $c = 7;$ $x = 2;$
2) $a = 2{,}9;$ $b = 1{,}3;$ $c = 1{,}5;$ $x = 10;$
3) $a = 2\frac{1}{3};$ $b = 1\frac{3}{5};$ $c = 2\frac{1}{4};$ $x = 3\frac{2}{5}$?

---

§ 19.
Division von Potenzen.

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

1. $a^7 : a^4$. 2. $a^8 : a^3$. 3. $a^{15} : a^5$.
4. $\frac{c^9}{c^3}$. 5. $\frac{c^{14}}{c^3}$. 6. $\frac{c^6}{c^5}$.
7. $\frac{7^5}{7^3}$. 8. $\frac{2^6}{2^4}$. 9. $\frac{4^4}{4^2}$.
10. $8^3 : 8^2$. 11. $3^5 : 3^2$. 12. $7^2 : 7^2$.
13. $m^5 : m^x$. 14. $m^x : m^{2y}$. 15. $m^{x+1} : m^x$.
16. $\frac{y^{n+1}}{y}$. 17. $\frac{y^{n-1}}{y^3}$. 18. $\frac{y^{n+1}}{y^{n-1}}$.
19. $\frac{a^x}{a^{x-5}}$. 20. $\frac{a^7}{a^{2-x}}$. 21. $\frac{a^3}{a^{3-2x}}$.
22. $\frac{p^{8-n}}{p^{5-4n}}$. 23. $\frac{p^{n+1}}{p^{1-2n}}$. 24. $\frac{p^{n+1}}{p^{n+1}}$.
25. $\frac{b^{n+3}}{b^{n-5}}$. 26. $\frac{b^{5n-4}}{b^{4n-3}}$. 27. $\frac{b^4}{b^{4n-1}}$.
28. $\frac{a^{5+2n}}{a^{11-5n}}$. 29. $\frac{a^{3n+2}}{a^{2n+3}}$. 30. $\frac{a^{4n-3}}{a^{4n-3}}$.
31. $\frac{x^{m+1}}{x^{1+n}}$. 32. $\frac{x^{1-m}}{x^{1-n}}$. 33. $\frac{x^{m-1}}{x^{n-1}}$.
34. $\frac{m^{3a-2b}}{m^{5a-4b}}$. 35. $\frac{m^{2a-5b}}{m^{7a-8b}}$. 36. $\frac{m^{3b-7a}}{m^{3-7a}}$.

---

37. Berechne $x^9 : x^6$ für: 1) $x = 3$; 2) $x = 5$; 3) $x = \frac{1}{4}$.
38. Wie groß ist $m^6 : m^x$ für: 1) $m = 2$; $x = 1$; 2) $m = 6$; $x = 3$?
39. Setze 2 für a, 1 für m, 3 für n und bestimme den Wert von:
1) $\frac{a^{3m+2n}}{a^{2m+n}}$. 2) $\frac{a^{2m+3n}}{a^{8m-n}}$.
40. $a^3 \cdot a^8 : a^5$. 41. $a^{11} \cdot a^3 : a^7$ 42. $x^n \cdot x^3 : x^3$.
43. $x^{3a} \cdot x^{2b} : x^{b-a}$. 44. $12b^5c^3 : 4b^3c$. 45. $33b^4c^4 : 11b^3c^2$.
46. $54p^2q^5 : 9pq^4$. 47. $65p^5q^6 : 13p^4q^4$. 48. $75p^{3a+4} : 15p^{2a-2}$.
49. $144p^{5a-7} : 8p^{2-4a}$. 50. $3{,}9x^4y^7 : 1{,}3x^2y^4$.
51. $8{,}5x^8y^5 : 1{,}7x^3y$. 52. $1{,}12a^8b^9 : 14a^7b^6$.
53. $1{,}05a^5b^7 : 15a^3b^7$. 54. $1{,}02a^{n+1} : 6a^{n-1}$.
55. $2{,}25a^{3n-2} : 25a^{2n+3}$. 56. $\frac{3}{5}p^3q^2 : \frac{2}{3}p^2q^2$.
57. $\frac{5}{7}p^4q^6 : \frac{1}{2}pq^2$. 58. $2\frac{3}{4}a^2bc : 2\frac{2}{3}a^2b$.

59. $5\frac{1}{4}a^3b^2c^2 : 1\frac{5}{7}a^2b^2c^2$. 60. $3\frac{1}{3}x^{2n-m} : 1\frac{2}{3}x^{n+m}$.

61. $12\frac{1}{2}x^{2-m} : 3\frac{3}{4}x^{2-5m}$.

62. Wie groß ist $b^{11} \cdot b^7 : b^{15}$ für: 1) $b = 3$; 2) $b = 7$.

63. Substituiere 7 für x, 5 für y und berechne:

1) $21x^2y^3 : 7xy$; 2) $117x^5y^4 : 13x^3y^3$.

---

64. $(45x^4 - 35x^3 + 20x^2) : 5x$.

65. $(63x^7 - 49x^5 - 77x^3) : 7x^2$.

66. $(120x^4 + 135x^6 - 75x^7) : 15x^2$.

67. $(65x^5y^4 - 104x^3y^2 + 39x^2y) : 13xy$.

68. $(119a^3b^2 - 85a^2b^2 - 51a^2b^3) : 17a^2b^2$.

69. $(225a^8b^5 + 475a^6b^7 - 150a^4b^9) : 25a^4b^5$.

70. $(16a^{2m+1} - 12a^{3m+2} - 8a^{4m+3}) : 4a^m$.

71. $(56a^{2m+3n} - 40a^{3m-2n} + 24a^{2m+2n}) : 8a^{2m-2n}$.

72. $(9{,}6p^3q^5 - 6{,}4p^5q^3) : 0{,}16p^3q^3$.

73. $(14{,}4p^7q^8 + 10{,}8p^5q^5 - 8{,}4p^6q^7) : 0{,}12p^5q^5$

74. $(4\frac{9}{10}x^5y^5 - 4\frac{1}{5}x^5y^4 + 1\frac{13}{15}x^4y^5) : 1\frac{2}{5}x^4y^4$.

75. $(\frac{8}{9}x^{5a-3b} - \frac{14}{15}x^{2a-3b} + \frac{5}{6}x^{2a+b}) : \frac{2}{3}x^{2a-3b}$.

$$a^{m-n} = \frac{a^m}{a^n}.$$

76. a^5 als Quotient von Potenzen mit der Basis a darzustellen. Wieviel Fälle sind möglich?

---

§ 20.
Division relativer Größen.

1. $(+x) : (+y)$. 2. $(+x) : (-y)$. 3. $(-x) : (-y)$.

4. $\frac{-x}{+y}$. 5. $\frac{+8a}{-2}$. 6. $\frac{-15b}{+5}$.

7. $(-24x) : (-3x)$. 8. $(-36c) : (+9c)$. 9. $(+85m) : (+17)$.

10. $\frac{-26f}{-39}$. 11. $\frac{+8b}{-4c}$ 12. $\frac{-25x}{-5y}$.

13. $(+48xy) : (-20x)$. 14. $(-64abc) : (+24bc)$.

15. $(+3mp) : (+12mp)$. 16. $(-104xy) : (-26xyz)$.

17. $\frac{+72ab^2}{+160ab}$. 18. $\frac{-119o^2p^2}{+85o^2p}$.

19. $\frac{-64x^2y^3}{+136x^3y^2}$. 20. $\frac{+120pr^2s^4}{-45p^2x}$.

21. $(-171a^2x^3y):(+190a^3xy^3)$. 22. $(-0{,}5a):(+0{,}2a^2)$.
23. $(+0{,}13c^2):(-0{,}39ac)$. 24. $(+2{,}5x^2):(-0{,}15x^2y)$
25. $(-6{,}4a^2b^2c):(+1{,}6a^2b^3)$. 26. $(+0{,}12x^3y^2):(+0{,}96x^3y^3)$.
27. $(+\frac{1}{5}a^3b):(-20a^2b^2)$. 28. $(-3\frac{1}{3}x^2yz^2):(-\frac{3}{5}xy^2z^2)$.
29. $(+7\frac{1}{5}r^2s^3):(+\frac{5}{12}r^2s^2x)$.

30. $\frac{a-b}{a-b}$. 31.*) $\frac{a-b}{b-a}$. 32. $\frac{3(c-d)}{d-c}$.

33. $\frac{m+n}{m-n}$ 34. $\frac{15(x-y)}{5(y-x)}$. 35. $\frac{14(b-c)}{35(c-b)}$.

36. $\frac{72(a-b)}{54(a+b)}$. 37. $\frac{12a(b+c)}{15ab(b+c)}$ 38. $\frac{7x(c-d)z}{35z(c-d)}$.

39. $\frac{24(x+1)a}{36ab(x-1)}$. 40. $\frac{2{,}5x(a+2)}{3{,}5a^2(a-2)x^2}$.

41. $\frac{0{,}3(x+1)(x+3)}{0{,}12(x+1)(x-3)}$. 42. $\frac{1{,}75a^2(m-1)(n+2)}{2{,}25a(1-m)(n+2)}$

Stelle die Wertetabellen für die folgenden Funktionen auf:

43. $y=\frac{x}{5}$ von $x=-5$ bis $x=+5$.
44. $y=\frac{8}{x}$ von $x=-4$ bis $x=+4$.
45. $y=-\frac{2x}{3}$ von $x=-2$ bis $x=+6$.
46. $y=\frac{x^2}{4}$ von $x=-2$ bis $x=+10$.
47. $y=\frac{10}{x^2}$ von $x=-2$ bis $x=+10$
48. $y=\frac{3x+5}{7}$ von $x=-3$ bis $x=+3$.
49. $y=\frac{9-4x}{2x}$ von $x=-5$ bis $x=+5$.
50. $y=\frac{5x+12}{x-3}$ von $x=-5$ bis $x=+5$.

---

51. $(+3x)\cdot(+12y):(-9xy)$.
52. $(-7a)\cdot(-15b):(+35b)$.
53. $(-11p)\cdot(+8o):(+22o^2)$.
54. $(+5xy)\cdot(-16xy):(-8x^2y)$.
55. $(-14abc)\cdot(-7a^2bc^2):(+4a^3b^3c^3)$.
56. $(+0{,}2x^2y^2)\cdot(-0{,}4xy):(-0{,}08x^3y)$.
57. $(-0{,}25ab^2)\cdot(-0{,}4a^2b^2):(+0{,}2a^3b^3)$.
58. $(-\frac{4}{5}mn^2)\cdot(+\frac{1}{2}m^2n):(-2mn)$.

*) Beachte: $x-y=-(y-x)$.

59. $(+\frac{2}{3}o^2p^3)\cdot(-\frac{1}{5}o):(+4op^2)$.
60. $(-\frac{3}{4}xy)\cdot(-\frac{12}{5}x^2):(-3\frac{1}{3}x^3y)$.
61. $(-\frac{7}{24}a^2b)\cdot(+\frac{6}{7}b):(+2\frac{2}{5}a^2b)$.
62. $(+5a)\cdot(-8b):[(-4a^2)\cdot(-7b)]$.
63. $(-30x^2y)\cdot(-3xy^3):[(+2x^3)\cdot(-9xy^3)]$.
64. $(+0{,}3op)\cdot(+0{,}3p^2):[(-2{,}5o^2p)\cdot(-5)]$.
65. $(-\frac{1}{2}ab)\cdot(+\frac{2}{3}abc):[(+\frac{2}{3}a^2c\cdot(-\frac{3}{4}b)]$.

---

66. $(5a+5b):(-5)$.
67. $(7a+7b-7c):(-7)$.
68. $(bx-cx):x$.
69. $(ad+cd):(-d)$.
70. $(abc-ab^2+bc^2):(-b)$.
71. $(36x-48y+72z):(-12)$.
72. $(16ax+36bx-44cx):4x$.
73. $(20a^2b^2-35a^3b^2+15a^2b^3):(-5a^2b^2)$.
74. $(85o^2p^2r+34o^2p^3-51o^2p^2r^2):17o^2p^2$.
75. $(-48x^5y^4+112x^3y^2-64x^4y^5):(-16x^2y^2)$.

---

§ 21.

Division von einem Polynom durch ein anderes.

1. $(24a+32b):(3a+4b)$.
2. $(25a+15b):(5a+3b)$.
3. $(36c-45d):(4c-5d)$.
4. $(70m-42n):(5m-3n)$.
5. $(105x+75y):(7x+5y)$.
6. $(85a^2-102b^2):(5a^2-6b^2)$.
7. $(39a^2b+52ab^2):(3a+4b)$.
8. $(96x^3y^2-64x^2y^3):(6x-4y)$.
9. $(45bc+35bd+55be):(9c+7d+11e)$.
10. $(125x^3y^3-75x^2y^3-25xy^4):(5x^2y-3xy-y^2)$.
11. $(2{,}8ab+4{,}2b^2):(2a+3b)$.
12. $(0{,}9x^2-0{,}6xy):(0{,}3x-0{,}2y)$.
13. $(1\frac{5}{16}x^2y^2-1\frac{1}{8}xy^3):(\frac{7}{8}x-\frac{3}{4}y)$.
14. $(2\frac{2}{5}a^3b^2+2\frac{4}{5}a^2b^3):(1\frac{1}{2}a^2b+1\frac{3}{4}ab^2)$

---

15. $(ax-ay+bx-by):(x-y)$.
16. $(am+bm+an+bn):(a+b)$.
17. $(mn-n+m-1):(m-1)$.
18. $(mn+n+m+1):(m+1)$.
19. $(2ax+3bx-2ay-3by):(x-y)$.
20. $(4ac-5bc+4ad-5bd):(4a-5b)$.

21. $(6ax + 4ay + 3bx + 2by) : (3x + 2y)$.
22. $(20am - 12an - 25bm + 15bn) : (5m - 3n)$.
23. $(75a^2x - 125b^2x + 60a^2y - 100b^2y) : (15a^2 - 25b^2)$.
24. $(128a^2x^2 - 88a^2y^2 + 176b^2x^2 - 121b^2y^2) : (8a^2 + 11b^2)$.
25. $(0{,}15p^2r - 0{,}2q^2r + 0{,}18p^2s - 0{,}24q^2s) : (0{,}3p^2 - 0{,}4q^2)$.
26. $(0{,}6b^2x^2 - 0{,}75b^2y^3 - 3{,}6cx^2 + 4{,}5cy^3) : (1{,}2x^2 - 1{,}5y^3)$.

---

27. $(15a^2 - 4a - 96) : (3a - 8)$.
28. $(30x^4 + 17x^2 - 35) : (6x^2 - 5)$.
29. $(6a^2 - ab - 12b^2) : (3a + 4b)$.
30. $(30a^2 - 67ab + 35b^2) : (5a - 7b)$.
31. $(24p^2 + 73pq + 24q^2) : (8p + 3q)$.
32. $(66m^2 + 113mn - 65n^2) : (11m - 5n)$.
33. $(35u^2 + 87uv + 54v^2) : (7u + 9v)$.
34. $(48x^4 - 54x^2y^2 - 27y^4) : (6x^2 - 9y^2)$.
35. $(0{,}06a^4 + 0{,}05a^2b^2 - 0{,}06b^4) : (0{,}2a^2 + 0{,}3b^2)$.
36. $(0{,}24x^2 + 0{,}1xy - 0{,}39y^2) : (1{,}2x - 1{,}3y)$.
37. $(2\frac{2}{3}n^4 + 1\frac{1}{15}m^2n^2 - 1\frac{1}{5}m^4) : (\frac{2}{3}n^2 + \frac{3}{5}m^2)$.
38. $(\frac{4}{5}a^4b^2 - 1\frac{1}{3}a^3b^3 + \frac{5}{9}a^2b^4) : (\frac{8}{15}a^2b - \frac{4}{9}ab^2)$.
39. $(10x^2 + 7xy - 12y^2 + 20xz - 16yz) : (5x - 4y)$.
40. $(12x^4 + 2x^2y^2 - 4y^4 - 9x^2z - 6y^2z) : (3x^2 + 2y^2)$.
41. $(6a^2 + 9ab + 19ac + 6bc + 10c^2) : (2a + 3b + 5c)$.
42. $(12a^2 - 7ab - 8ac - 12b^2 - 6bc) : (3a - 4b - 2c)$.
43. $(25a^6 + 5a^5 + 53a^4 + 10a^3 + 42a^2) : (5a^3 - 3a^2 + 7a)$.
44. $(8x^3 - 26x^4 + 17x^5 - 26x^6 - 21x^7) : (2x^2 - 5x^3 - 3x^4)$.

---

45. $(x^3 + y^3) : (x + y)$.
46. $(x^3 - y^3) : (x - y)$.
47. $(x^4 - y^4) : (x + y)$.
48. $(x^4 - y^4) : (x - y)$.
49. $(x^5 + y^5) : (x + y)$.
50. $(x^5 - y^5) : (x - y)$.
51. $(27a^3 - 8b^6) : (3a - 2b^2)$
52. $(64x^9 + 27y^6) : (4x^3 + 3y^2)$.
53. $(125c^6 - 64d^3) : (5c^2 - 4d)$.
54. $(81p^8 - 16q^4) : (3p^2 + 2q)$.
55. $(0{,}064x^6 - 0{,}027y^3) : (0{,}4x^2 - 0{,}3y)$.
56. $(0{,}125a^9 + 0{,}064b^6) : (0{,}5a^3 + 0{,}4b^2)$.
57. $(\frac{8}{27}c^3 - \frac{64}{125}d^9) : (\frac{2}{3}c - \frac{4}{5}d^3)$.
58. $(\frac{625}{256}x^8 - \frac{81}{16}y^4) : (\frac{5}{4}x^2 + \frac{3}{2}y)$.

---

§ 22.

Zerlegung von Summen in Faktoren.

Verwandle die folgenden Summen in Produkte durch Absondern gemeinschaftlicher Faktoren:

1. $5a + 5b$
2. $9p + 9q$.
3. $7x - 7y$.
4. $5c^2 + 5d^2$
5. $am + bm$
6. $cx^2 - dx^2$.
7. $4a + 8b$
8. $5x - 10y$.
9. $xy - y$.
10. $ab + a$.
11. $5m + 5$
12. $10p - 5q$.
13. $a^2 - ab$.
14. $x^2 + xz$.
15. $a^2 - a$.
16. $4x^2 + x$.
17. $12a + 16b$
18. $21a - 28b$.
19. $6ax + 12ay$.
20. $15bc + 25bd$.
21. $30x^2 - 24x$.
22. $49y^2 - 63yz$.
23. $8a^4 + 12a^3$.
24. $25x^4 - 15x^6$
25. $7c^2d^2 - 21d^2$
26. $64b^3 - 24ab^2$.
27. $64a^2b^3 + 56a^3b^2$.
28. $85a^5b^4 - 119a^4b^5$
29. $63x^3y^2 - 99x^2y^3$.
30. $117x^4y^3 + 91x^3y^4$
31. $32ab^3c^2 - 20a^3b^3c$.
32. $105a^4b^3 - 135a^3b^4$
33. $30a^3b^3c^2 + 35a^2b^2c^2 - 15ab^3c^3$
34. $40x^2y^2 - 72x^2y^3 + 48x^3y^2$
35. $99p^3q^3 - 110p^3q^2 + 88p^4q^3$.
36. $35b^2y^2 - 21b^3y^3 - 28b^3y^2$
37. $-150a^3x^3 + 75a^2x^4 - 125a^4x^4$.
38. $12a^2bc - 20ab^2c + 4abc$.
39. $35x^4yz - 15x^4y + 20x^5y$
40. $45x^2y^2 + 36x^3y^2 - 63x^2y^3$
41. $0{,}3x + 0{,}3y$.
42. $0{,}15x - 0{,}15y$.
43. $0{,}16a + 0{,}12b$.
44. $2{,}5a - 3b$.
45. $0{,}6x - 0{,}9$.
46. $4{,}8 - 3{,}2x$.
47. $2{,}4ab - 3{,}2ac$
48. $0{,}12ab + 0{,}21bc$.
49. $1{,}5x^2y^2 + 2{,}5xy^3$.
50. $0{,}06a^3b^2 - 0{,}08a^2b^3$
51. $3a^2bx - 3{,}6abx^2 + 4{,}2acx^2$
52. $0{,}24a^2x^2 - 0{,}18a^3x^3 - 0{,}21a^3x$.
53. $\frac{1}{4}a - \frac{1}{4}b$.
54. $\frac{2}{3}a + \frac{2}{3}b$.
55. $\frac{2}{5}a + \frac{3}{5}b$.
56. $\frac{3}{7}a - \frac{4}{7}b$.
57. $\frac{2}{3}x - 1\frac{1}{3}$.
58. $1\frac{7}{9} + 2\frac{2}{9}x$.
59. $6ab + 7\frac{1}{2}ac$.
60. $6\frac{3}{4}a^2bc - 11\frac{1}{4}abc^2$.
61. $3\frac{3}{4}a^3b - 6\frac{3}{4}a^2bc^2 - 5\frac{1}{4}a^2b^2c$.
62. $6\frac{2}{3}a^2b^2c^2 - 3\frac{1}{3}a^2b^3c + 8\frac{1}{3}b^2c$

---

63. $3p(y + z) + 5q(y + z)$.
64. $2a(m - n) + 4b(m - n)$.
65. $7x(3a + 2b) + 5y(3a + 2b)$.
66. $5a(x - 2y) - 3b(x - 2y)$.

67. $9a(3a - 2b) - 8b(3a - 2b)$.
68. $x(a + b) + y(a + b) + z(a + b)$.
69. $a(3x - 2y) - b(3x - 2y) + c(3x - 2y)$
70. $a(x + y) - b(x + y) + x + y$.
71. $2c(4a + b) - 3d(4a + b) + 4a + b$.
72. $(3a + 7b)(c + d) + 3a + 7b$.
73. $5x - 3y + (2a - 3c)(5x - 3y)$.
74. $(3x - 4y)(3a - 2b) + 3x - 4y$.

Sondere aus je zwei der Summanden die gemeinschaftlichen Faktoren ab und zerlege die Summen in Produkte:

75. $10ax + 15bx + 8ay + 12by$.
76. $12ax - 20ay - 9bx + 15by$.
77. $15ax - 12bx + 20ay - 16by$.
78. $21ax - 18bx - 35ay + 30by$
79. $10a^2 - 15ab + 12ac - 18bc$.
80. $18a^2b + 10b^2 - 63a^3 - 35ab$.
81. $55m^2 - 40mn + 99mn^2 - 72n^3$
82. $15a^2m^2 + 12a^2n + 5m^2 + 4n$.
83. $108a^2b - 63b^2 - 12a^2 + 7b$.
84. $45ax + 39ay + 60bx + 52by$
85. $56x^2y^2 - 72xy^3 + 7x^2 - 9xy$.
86. $51bx^2 + 85bx^2y + 45x + 75xy$.
87. $30abc - 24c^2 - 20a^2b + 16ac$.
88. $42a^2c + 18bc^2 - 28a^3 - 12abc$.
89. $30xy^2 - 25y^3 + 6xz - 5yz$.
90. $99ac^2 + 88ab^2 - 108bc^2 - 96b^3$.
91. $30xc^2 - 35x^2y - 48c^2y + 56xy^2$
92. $20x^3 - 12x^2y - 25xy^2 + 15y^3$.
93. $12x^3 + 10xy^2 - 18x^2y - 15y^3$
94. $21m^3 - 15mn^2 + 14m^2n - 10n^3$.
95. $32m^3 + 40m^2n^2 - 28mn - 35n^3$.
96. $88a^4 - 72a^2b + 77a^2b^3 - 63b^4$.
97. $150a^3 + 130ab^3 - 135a^2 - 117b^3$.
98. $1{,}4a^2 + 2{,}1ab + 1{,}2ac + 1{,}8bc$.
99. $5{,}6a^2 - 7{,}2ab - 3{,}5ac + 4{,}5bc$.
100. $0{,}25am - 0{,}35an + 0{,}15m^2 - 0{,}21mn$.
101. $0{,}35mn + 0{,}1an - 0{,}42m^2 - 0{,}12am$.
102. $0{,}36x^3 + 0{,}39x^2y - 0{,}48xy^2 - 0{,}52y^3$.
103. $0{,}45x^3 - 0{,}51xy^2 + 0{,}3x^2y - 0{,}34y^3$
104. $\frac{1}{10}a^2 + \frac{1}{15}ac - \frac{1}{8}ab - \frac{1}{12}bc$.

105. $\frac{1}{18}ab - \frac{1}{15}ac - \frac{1}{18}bc + \frac{1}{15}c^2$.
106. $1\frac{7}{20}x^3 - \frac{4}{5}xy^2 + 1\frac{1}{2}x^2y - \frac{8}{9}y^3$
107. $\frac{7}{12}xy^2 + \frac{5}{9}y^3 - \frac{7}{16}x^2y - \frac{5}{12}xy^2$.

Die folgenden Summen sind in Produkte umzuwandeln mit Hilfe der Formeln:

I. $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$;
II. $a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$;
III. $x^2 + (a + b)x + ab = (x + a)(x + b)$;
IV. $(a^3 \pm b^3) = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$.

108. $9x^2 - 4y^2$.
109. $25x^2 - 49y^2$
110. $9a^2 - 25b^2$.
111. $64b^2 - 49a^2$.
112. $25m^2 - 36$.
113. $81 - 16m^2$.
114. $1 - a^2$.
115. $a^4 - 1$.
116. $81a^4 - 4b^2$.
117. $25 - 9b^4$.
118. $64a^2b^2 - 25c^2d^2$.
119. $121a^2b^2 - 81b^2c^2$
120. $0{,}04x^2 - 0{,}09y^2$.
121. $0{,}25x^2 - 0{,}36y^2$.
122. $0{,}81a^4 - 0{,}64b^4$.
123. $0{,}16a^2b^2 - 0{,}25$.
124. $1{,}69x^2y^4 - 2{,}25y^2$.
125. $1{,}96x^4 - 1{,}44y^4$.
126. $\frac{1}{16}a^2 - \frac{1}{25}b^2$.
127. $\frac{1}{36}a^4 - \frac{1}{4}b^4$.
128. $\frac{4}{9}m^4 - \frac{9}{16}n^2$.
129. $\frac{16}{25}n^4 - \frac{9}{64}$.
130. $2\frac{1}{4}x^4y^2 - 1\frac{9}{16}x^2y^4$
131. $1\frac{7}{9}x^2y^2 - 1\frac{9}{16}$.

---

132. $9x^2 + 12xy + 4y^2$.
133. $25y^2 - 30xy + 9x^2$.
134. $4a^2 + 20ab + 25b^2$
135. $49a^2 + 70ab + 25b^2$.
136. $64m^2 - 144mn + 81n^2$
137. $36m^2 - 60m + 25$.
138. $9x^2 + 6x + 1$.
139. $1 - 4x + 4x^2$.
140. $144c^2 + 168cd + 49d^2$.
141. $225c^2 - 240cd + 64d^2$.
142. $1 - 26a + 169a^2$.
143. $196a^2 - 56a + 4$.
144. $0{,}04a^2 + 0{,}12ab + 0{,}09b^2$.
145. $0{,}25a^2 - 0{,}4ab + 0{,}16b^2$
146. $0{,}36m^2 - 0{,}84mn + 0{,}49n^2$.
147. $0{,}81m^2 + 1{,}44m + 0{,}64$.
148. $1{,}21x^2 + 1{,}1xy + 0{,}25y^2$
149. $1{,}69x^2 - 0{,}52x + 0{,}04$.
150. $\frac{1}{9}y^2 - \frac{1}{6}yz + \frac{1}{16}z^2$.
151. $\frac{1}{4}y^2 + \frac{1}{5}yz + \frac{1}{25}z^2$.
152. $\frac{4}{9}x^2 + x + \frac{9}{16}$.
153. $\frac{4}{25}x^2 - 1\frac{1}{5}xy + 2\frac{1}{4}y^2$
154. $12x^3y + 36x^2y^2 + 27xy^3$.
155. $80x^2y - 200xy^2 + 125y^3$
156. $96c^3d + 48c^2d^2 + 6cd^3$
157. $72cd - 120cd^2 + 50cd^3$.

---

158. $x^2 + 7xy + 12y^2$.
159. $x^2 + 12xy + 35y^2$.
160. $a^2 - 11ab + 30b^2$
161. $a^2 - 17ab + 72b^2$.
162. $m^2 + 12mn + 27n^2$.
163. $m^2 - 18mn + 77n^2$.
164. $15p^2 - 8pq + q^2$
165. $p^2 + 11pq + 28q^2$.
166. $x^2 - 5xy + 6y^2$.
167. $63x^2 + 16xy + y^2$.
168. $a^2 + 7a + 12$.
169. $a^2 - 12a + 35$.
170. $p^2 + 13p + 40$.
171. $p^2 - 12p + 27$
172. $x^2 - 16x + 55$
173. $x^2 + 15x + 54$.

---

174. $x^3 + y^3$.
175. $x^3 + 8y^3$.
176. $27a^3 + 8b^3$.
177. $64a^3 + 125b^3$
178. $m^3 - n^3$.
179. $27m^3 - n^3$
180. $1 + 64p^3$.
181. $125p^3 - 1$.
182. $27x^3 - 216$
183. $1000 - 729x^3$
184. $64y^3 + 27$.
185. $125 - 216y^3$

Berechne folgende Zahlenausdrücke nach der Formel

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b).$$

186. $37^2 - 32^2$
187. $31^2 - 29^2$.
188. $51^2 - 50^2$
189. $56^2 - 44^2$.
190. $63^2 - 37^2$
191. $78^2 - 22^2$.
192. $93^2 - 27^2$
193. $111^2 - 71^2$.
194. $125^2 - 100^2$
195. $354^2 - 353^2$.
196. $586^2 - 585^2$.
197. $374^2 - 274^2$

VIII. Brüche.

§ 23.

Erweitern und Kürzen von Brüchen.

A. Erweitern.

1. Erweitere $\frac{3}{4}$ a) mit x; b) mit 2; c) mit -1; d) mit -5; e) mit $2a$; f) mit $-7bc$.

2. Erweitere a) $\frac{x}{y}$ mit a; b) $\frac{a}{b}$ mit 3; c) $\frac{c}{d}$ mit c; d) $\frac{3p}{4q}$ mit $5pq$.

3. Erweitere a) $\frac{x+y}{2y}$ mit x; b) $\frac{a-2b}{3}$ mit $2a$; c) $\frac{5a+3b}{7b}$ mit $3b^2$; d) $\frac{a^2+1}{b}$ mit a; e) $\frac{9+2y}{11x}$ mit x^2y; f) $\frac{5m+3}{2n}$ mit $7mn^2$

4. Erweitere den Bruch $\frac{m-n}{m+n}$ mit a) n; b) $m+n$; c) $m-n$.

5. Erweitere den Bruch $\frac{2a+3b}{4a-5b}$ mit a) 4; b) $2x-3y$; c) $3a+2b$.

6. Erweitere zu einem Bruch mit dem Nenner

a) xy^2 die Brüche: $\frac{x}{y}$; $\frac{y}{x}$; $\frac{y^2}{x}$; $\frac{1}{xy^2}$; $\frac{2x}{y^2}$;

b) abc die Brüche: $\frac{a}{b}$; $\frac{a}{bc}$; $\frac{5}{abc}$; $\frac{b+3}{bc}$; $\frac{4-bc}{ab}$;

c) a^3b^3 die Brüche: $\frac{b^2}{a^3}$; $\frac{a}{b^2}$; $\frac{x}{a^2b^2}$; $\frac{x+y}{a^3b}$; $\frac{7+5a^2}{a^2b^3}$.

7. Erweitere den Bruch $\frac{x-3y}{2x+5y}$ auf den Nenner $6x^2+15xy$.

8. " " " $\frac{5x+2y}{3ax-2y}$ " " " $21ax-14y$.

9. " " " $\frac{5-x}{2x+3}$ " " " $8x^3+12x^2$.

10. " " " $\frac{3a}{a+b}$ " " " a^2-b^2.

11. " " " $\frac{a+b}{a-b}$ " " " $(a-b)^2$.

12. " " " $\frac{2x+3}{x+y}$ " " " $x^2+2xy+y^2$.

13. " " " $\frac{x+y}{x-y}$ " " " x^2-y^2.

14. " " " $\frac{3a}{4a+3b}$ " " " $16a^2-9b^2$.

15. " " " $\frac{m+3n}{1-8n}$ " " " $1-64n^2$.

16. " " " $\frac{5p-7}{5p+7}$ " " " $25p^2-49$.

17. " " " $\frac{2x+3y}{5x-3z}$ " " " $20xy-12yz-15x^2+9xz$.

18. " " " $\frac{7m-5n}{3a+2b}$ " " " $15a^2+10ab-9ac-6bc$.

19. " " " $\frac{4c+5d}{3c-d}$ " " " $6cx-2dx+21cy-7dy$.

20. " " " $\frac{6a^2-7b^2}{5c+3d}$ " " " $15ac+9ad-25bc-15bd$

21. " " " $\frac{3x+2y}{5m^2-4n^2}$ " " " $10m^3-8mn^2+35m^2n-28n^3$.

22. Erweitere den Bruch $\frac{4p-5q}{3p+5q}$ auf den Nenner $18p^2+15pq-25q^2$.

23. 〃 〃 〃 $\frac{9x+11y}{6x-7y}$ 〃 〃 〃 $48x^2-26xy-35y^2$.

24. 〃 〃 〃 $\frac{2a^2+3b^2}{5a^2-4b^2}$ 〃 〃 〃 $15a^4-2a^2b^2-8b^4$.

25. 〃 〃 〃 $\frac{7x-5y}{3x^2+4y^2}$ 〃 〃 〃 $15x^4+41x^2y^2+28y^4$.

26. 〃 〃 〃 $\frac{x^2-xy+y^2}{x+y}$ 〃 〃 〃 x^3+y^3.

27. 〃 〃 〃 $\frac{x-y}{x^2+xy+y^2}$ 〃 〃 〃 x^3-y^3.

28. 〃 〃 〃 $\frac{5}{3p-q}$ 〃 〃 〃 $27p^3-q^3$.

29. 〃 〃 〃 $\frac{3}{5a+4b}$ 〃 〃 〃 $125a^3+64b^3$.

30. 〃 〃 〃 $\frac{a-b}{a^2-2ab+4b^2}$ 〃 〃 〃 a^3+8b^3.

31. 〃 〃 〃 $\frac{2p-5}{1-4p+16p^2}$ 〃 〃 〃 $1+64p^3$.

B. Kürzen.

32. $\frac{abx}{cxy}$. 33. $\frac{ade}{dfg}$. 34. $\frac{abc}{acf}$.

35. $\frac{ab^2}{abc}$. 36. $\frac{x^2yz}{xyz^2}$. 37. $\frac{rs^2}{pr^2s}$.

38. $\frac{b}{ab}$. 39. $\frac{4xyz}{12y^2}$. 40. $\frac{15pq^2}{20p^2q}$.

41. $\frac{54a^3b^5}{36a^5b^6}$. 42. $\frac{85d^3e^7}{119d^2e^5}$. 43. $\frac{39p^4r^9}{104op^3r^8}$.

---

44. $\frac{cd}{ad+bd}$. 45. $\frac{bc+cd}{ac}$. 46. $\frac{6ax+15bx}{12cx}$.

47. $\frac{21xy}{35x-7xz}$. 48. $\frac{ab-a^2}{a^2+ab}$. 49. $\frac{x^2+xy}{x^2-xy}$.

50. $\frac{y^2+xy}{x^2+xy}$. 51. $\frac{3a+3b}{11a+11b}$. 52. $\frac{24a^2+12ab}{14a^2+7ab}$.

53. $\frac{75x^2y^3-30x^2y^4}{50x^2y^2-20x^2y^3}$. 54. $\frac{35b^2c-21bc^2}{21b^2c-35bc^2}$. 55. $\frac{18a^2y^2-27ay^3}{6ay^3-9y^4}$.

56. $\frac{24p^3q-20pq^3}{72p^4-60p^2q^2}$. 57. $\frac{75a^3b^3c+100a^2b^3c^2}{15a^2b^2c+20ab^2c^2}$. 58. $\frac{6x^2y+15xy^2-9xy}{4xy+10y^2-6y}$

59. $\frac{21a^2b - 14ab + 35ab^2}{105ab^2 - 70b^2 + 175b^3}$.

60. $\frac{20ax - 12a^2x + 16ax^2}{60a^2xy - 36a^3xy + 48a^2x^2y}$.

61. $\frac{42q^2r^2s - 30q^3r^2 + 12q^2r^3}{14qs - 10q^2 + 4qr}$.

62. $\frac{26a^2b^2c^2 - 39a^4b^3c + 65a^2b^2c}{2a^2b^2c - 3a^4b^3 + 5a^2b^2}$.

63. $\frac{30x^3yz^2 + 60x^2y^3z^2 - 90xy^2z^4}{25x^4y^2z + 50x^3y^4z - 75x^2y^3z^3}$.

64. $\frac{2x - 2y}{y - x}$.

65. $\frac{3x^2 - 12xy}{28y^2 - 7xy}$.

66. $\frac{10ab - 15a^2}{9ab - 6b^2}$.

67. $\frac{30r^2 - 50qr}{10qr - 6r^2}$.

---

68. $\frac{a^2 - b^2}{3a^2 + 3ab}$.

69. $\frac{5x^2 - 5xy}{x^2 - y^2}$.

70. $\frac{9a + 9ab}{1 - b^2}$.

71. $\frac{36x^2 - y^2}{6x + y}$.

72. $\frac{7r - 5s}{49r^2 - 25s^2}$.

73. $\frac{64a^2 - 25b^2}{40a + 25b}$.

74. $\frac{63x - 49y}{81x^2 - 49y^2}$.

75. $\frac{(x - y)^2}{x^2 - y^2}$.

76. $\frac{x^2 - y^2}{x^2 + 2xy + y^2}$.

77. $\frac{a^2 - 2ab + b^2}{a^2 - b^2}$.

78. $\frac{(2a + 3b)^2}{4a^2 - 9b^2}$.

79. $\frac{2x - 3}{4x^2 - 9}$.

80. $\frac{16m^2 - 1}{(4m - 1)^2}$.

81. $\frac{5a^2 - 5}{a^2 - a}$.

82. $\frac{a^2 - 9b^2}{12b^2 - 4ab}$.

83. $\frac{25y^2 - 16x^2}{8xy - 10y^2}$.

84. $\frac{a^3 - b^3}{a - b}$.

85. $\frac{q^2 - r^2}{q^3 - r^3}$.

---

86. $\frac{10a^2x + 15ab + 4ax + 6b}{2a^2x - 6ax + 3ab - 9b}$.

87. $\frac{3bc^2 - cd + 15bc - 5d}{6bc^2 - 2cd - 3bc + d}$.

88. $\frac{21a^2b + 6ac - 35ab^2 - 10bc}{28ab^2 + 8bc + 21abc + 6c^2}$.

89. $\frac{2ab - 2a^2 + bc - ac}{2ab - 2ac + bc - c^2}$.

90. $\frac{ax + a + x + 1}{a^2 - 1}$.

91. $\frac{ab + 2b + 3a + 6}{ab + 2b - 3a - 6}$.

92. $\frac{a^2 - 6a + 9}{a^2 - 5a + 6}$.

93. $\frac{x^2 - 3x - 4}{x^2 - 7x + 12}$.

---

§ 24.

Multiplikation und Division von Brüchen.

1. $\frac{a}{m} \cdot b$.

2. $\frac{2b}{c} \cdot d$.

3. $\frac{6x}{7y} \cdot 14a$.

4. $\frac{2a}{3b} \cdot c$.

5. $\frac{4a}{3b} \cdot m$.

6. $\frac{5p}{q} \cdot q$.

7. $2ab \cdot \frac{3c}{8a}$.

8. $5y \cdot \frac{2x}{15y}$.

9. $4cd \cdot \frac{5ab}{12cd}$.

10. $\frac{7yz}{88x}\ 44xz.$ 11. $\frac{9am}{20xy} \cdot 40axy.$ 12. $\frac{3a^2b}{5x^3y^2} \cdot 15xy.$

13. $\frac{21m^2n^2}{13a^3b^3}\ 39ab.$ 14. $\frac{14ab^2}{34p^4q^4} \cdot 85p^3q^2.$ 15. $\frac{5x^2y^2}{57a^5b^4} \cdot 76a^5b^6.$

16. $\frac{4(a+b)}{5(a-b)} \cdot (a^2 - b^2).$ 17. $\frac{2(x-y)}{7(x+y)} \cdot 28(x^2 - y^2).$

18. $\frac{11(a+b)^2}{15(a-b)^2} \cdot 105(a-b).$ 19. $\frac{3(x+2y)}{14(x-2y)} \cdot 7(x^2 - 4y^2).$

20. $\frac{9ab}{12xy^2 \cdot 5x^2z} \cdot 40x^2y^2z.$ 21. $\frac{4pq^2}{9ab\ \ 8a^2b^2} \cdot 72a^2b.$

---

22. $\left(\frac{a}{2} + \frac{b}{3} + \frac{c}{6}\right) 12d.$ 23. $\left(\frac{a^2}{5} - \frac{b^2}{9} - \frac{c^2}{15}\right) 45abc.$

24. $\left(\frac{p}{24q^3} + \frac{p^2}{16q^2} + \frac{p^3}{20q}\right) 4pq.$ 25. $\left(\frac{5a}{6xy} - \frac{9b}{16xz} - \frac{7c}{12yz}\right) \cdot 48xyz$

26. $\left(\frac{5}{x-y} - \frac{7}{x+y} + \frac{9x}{x^2 - xy}\right)(x^2 - y^2).$

27. $\left(\frac{2a}{x+y} - \frac{5ax}{x^2 + xy} - \frac{4a}{x-y}\right)(x^2 - y^2).$

---

28. $\frac{a}{b} : m.$ 29. $\frac{3a}{7} : b.$ 30. $\frac{bc}{x} : c$

31. $\frac{3x}{5y} : z.$ 32. $\frac{2a}{3b} : 4a^2$ 33. $\frac{5c}{6d^2} : 10c^3.$

34. $\frac{14a^4}{39b^2} : 42a^3b.$ 35. $\frac{104x^3y}{5a} : 26x^2y^2.$ 36. $\frac{51ab^2}{15xy} : 34b.$

37. $\frac{25p^2q}{16m} : 50pq.$ 38. $\frac{64a^5b^7}{11x^3} : 96a^2b^5.$ 39. $\frac{85x^8y^6}{3ab} : 119x^7y^7$

40. $\frac{5(m-n)}{m} : 35(m-n)^2.$ 41. $\frac{8(m+n)}{m-n} : 34(m+n)^2.$

42. $\frac{4(m-n)^2}{3(m+n)} : 2(m^2 - n^2).$

---

43. $\left(\frac{16ab}{2p} + \frac{36ac}{3q} + \frac{24ad}{2r}\right) : 4a.$

44. $\left(\frac{25bx}{7d^2} - \frac{35ax}{9e^2} - \frac{45dx}{16f^2}\right) : 5ax.$

45. $\left(\frac{119a^5b}{5x} - \frac{51a^4b^2}{2y} + \frac{85a^3b^3}{3z}\right) : 17a^2b^2.$

46. $\left(\frac{78x^3y^2}{5u} + \frac{104x^3y^4}{3} - \frac{117xy^4}{6v}\right) : 13xy^2.$

47. $\left(\frac{m+n}{7m} - \frac{(m-n)^2}{3} - \frac{m-n}{5n}\right) : (m^2 - n^2).$

48. $\left(\frac{3a-2b}{3x} + 9a^2 + 12ab + 4b^2 - \frac{3a+2b}{2y}\right) : (9a^2 - 4b^2).$

---

49. $\frac{a}{b} \cdot \frac{x}{y}.$

50. $\frac{2a}{3b} \cdot \frac{5x}{4y}.$

51. $\frac{8c}{5d} \cdot \frac{7a}{4b}.$

52. $\frac{2a^2}{4b^2} \cdot \frac{8a}{b}.$

53. $\frac{5m^2}{9n^2} \cdot \frac{3n}{m}.$

54. $\frac{7x^3}{11y^5} \cdot \frac{2y^6}{x^4}.$

55. $\frac{15p^2}{22q^3} \cdot \frac{1}{5p^5}.$

56. $\frac{1}{7x^2y^3} \cdot \frac{1}{7x^3y^2}.$

57. $\frac{a^2x^2}{b^2y^2} \cdot \frac{by}{ax}.$

58. $\frac{54ab^2}{19c} \cdot \frac{57c^2}{18a^2}.$

59. $\frac{17rs}{15p^4} \cdot \frac{45p^2}{102r^3s^3}.$

60. $\frac{169a^3x^5}{144b^4y^7} \cdot \frac{18ab^5y^6}{13b^2x^3}.$

61. $\frac{1}{p} \cdot \frac{1}{q} \cdot \frac{1}{r}.$

62. $\frac{x}{y} \cdot \frac{y}{z} \cdot \frac{x}{z}.$

63. $\frac{a}{2b} \cdot \frac{5d}{3c} \cdot \frac{6b}{5a}.$

64. $\frac{2m}{7n} \cdot \frac{3n}{5m} \cdot \frac{5n}{3m}.$

65. $\frac{5a^2b}{6x} \cdot \frac{2x^2y^2}{7ab^2} \cdot \frac{14b}{15ay^3}.$

66. $\frac{7p^3r^2}{11q^3} \cdot \frac{9pq^2}{10r^2} \cdot \frac{33r^5}{21q^3}.$

67. $\frac{(r-s)^2}{5} \cdot \frac{3r}{r^2-s^2}.$

68. $\frac{r^2+rs}{r} \cdot \frac{r-s}{(r+s)^2}.$

---

69. $\left(\frac{3a^2}{5b} - \frac{2a}{4b^2}\right) \cdot \frac{2b}{3a}.$

70. $\left(\frac{10x^2}{3ab^2} + \frac{15x^2}{7bc^2}\right) \cdot \frac{2b^2c}{5x^2}.$

71. $\left(\frac{5a^2}{6b^2} - \frac{7b^2}{12c^2} + \frac{8c^2}{9d^2}\right) \cdot \frac{3x}{y}.$

72. $\left(\frac{36r^2s}{55x^2y^3} - \frac{48r^2s^2}{75x^3y^3} + \frac{42rs^2}{45x^3y^2}\right) \cdot \frac{5x^2y^2}{6rs}.$

73. $\left(\frac{34a^4b^3}{65x^3y^2} + \frac{119a^5b^2}{52x^3y^4} - \frac{85a^3b^6}{104x^5y^2}\right) \cdot \frac{39x^3y^3}{51a^3b^2}.$

74. $\left(\frac{30x^5y^3}{28p^4q^2} - \frac{45x^3y^6}{56p^3q^5} - \frac{65x^3y^3}{84p^2q^2}\right) \cdot \frac{14p^2q^2}{15x^3y^3}.$

---

75. $\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right) \cdot (m + n).$

76. $\left(\frac{2b}{a} + \frac{3a}{b}\right) \cdot (a - b).$

77. $\left(\frac{5r^2s}{7xy} - \frac{8rs^2}{5xy}\right) \cdot \left(\frac{2x}{3s} - \frac{4y}{5r}\right).$

78. $\left(\frac{3a^2}{2x} - \frac{4b}{5x^2}\right) \cdot \left(\frac{2x^2}{3b} - \frac{7x}{5b^2}\right).$

79. $\left(\frac{5a}{2x} + \frac{3b}{4y}\right)\left(\frac{5a}{2x} - \frac{3b}{4y}\right)$.

80. $\left(\frac{9p^2q}{7m^2} + \frac{10pq^2}{11n^2}\right)\left(\frac{9p^2q}{7m^2} - \frac{10pq^2}{11n^2}\right)$.

81. $\left(\frac{3a}{2b} + \frac{5b}{4a}\right)^2$.

82. $\left(\frac{8x^2}{9y^2} - \frac{6y}{7x}\right)^2$.

83. $\left(\frac{x^2y^2}{z^2} + \frac{xy}{z} + 1\right) \cdot \left(\frac{xy}{z} - 1\right)$.

84. $\left(\frac{64a^3b^3}{27c^3} - \frac{16a^2b^2}{9c^2} + \frac{4ab}{3c} - 1\right) \cdot \left(\frac{4ab}{3c} + 1\right)$.

---

85. $\frac{m}{n} : \frac{a}{b}$.

86. $\frac{3a}{4b} : \frac{3x}{5y}$.

87. $\frac{7c}{3d} : \frac{14a}{9b}$.

88. $\frac{4a^2}{3b^2} : \frac{8a}{9b}$.

89. $\frac{12m^3}{5n^2} : \frac{4m^2}{n^2}$.

90. $\frac{9x^3}{5y^4} : \frac{12x^4}{y^3}$.

91. $15x^4 : \frac{3x^2}{2y^2}$.

92. $42a^2b^3c : \frac{14a^2b^2}{3m}$.

93. $5\frac{1}{2}x^5y^3 : \frac{22x^3y^3}{3}$.

94. $(a^2 - b^2) : \frac{a+b}{a}$.

95. $\frac{a+b}{a-b} : \frac{(a+b)^2}{a^2-b^2}$.

96. $\frac{2x-3}{2x+3} : \frac{4x^2-6x+9}{4x^2-9}$

---

97. $\left(\frac{25a^2b^2}{36x^2y^3} \cdot \frac{24a^2x^2}{15a^3b}\right) : \frac{5a^2b}{3y^4}$.

98. $\left(\frac{39x^5y^4z^3}{16a^2b^3c^4} : \frac{65x^3y^5}{64a^2c^3}\right) \cdot \frac{5b^2cy}{12x^3z^3}$.

99. $\left(\frac{14a^2b^3}{15p^4q^3} \cdot \frac{60b^2p}{21aq}\right) : \left(\frac{5ap^3}{16b^2q^2} \cdot \frac{6b^3p}{5a^2q^3}\right)$.

100. $\left(\frac{33a^2m^2}{24b^2p^2} : \frac{85x^2y^3}{18p^3q^4}\right)\left(\frac{17b^2y^2}{66q^7} : \frac{81a^2m^3}{96q^2x^3}\right)$.

---

101. $\left(\frac{5x^2}{3y^2} - \frac{3x}{4y}\right) : \frac{4x}{3y}$.

102. $\left(\frac{8a^2b}{9x^2} + \frac{4ab^2}{3ax^2}\right) : \frac{4ab}{5x^2}$.

103. $\left(\frac{8ax^3}{9b^5y} - \frac{20a^3x^4}{21b^4y^3} - \frac{14ax^2}{15b^3}\right) : \frac{2a^2x^3}{3b^3y}$.

104. $\left(\frac{44r^4s^3}{35a^3b^4} + \frac{28r^5s^4}{25a^4b^5} - \frac{32r^6s^5}{45a^5b^6}\right) : \frac{4r^3s^2}{5a^2b^3}$.

---

105. $\left(\frac{a^2}{bd} + \frac{ac}{d^2} - \frac{a}{c} - \frac{b}{d}\right) : \left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right)$.

106. $\left(\frac{2a^2}{b^2} - \frac{4}{3} + \frac{5b}{2} - \frac{5b^3}{3a^2}\right) : \left(\frac{a}{2b} - \frac{b}{3a}\right)$.

107. $\left(\frac{3a}{4} - \frac{3a^2}{2b} - \frac{3b^2}{5a} + \frac{6b}{5}\right) : \left(\frac{3}{a} - \frac{6}{b}\right)$

108. $\left(\frac{4}{7x} + \frac{4y}{3x^2} - \frac{5x}{7y^2} - \frac{5}{3y}\right) : \left(\frac{x}{7} + \frac{y}{3}\right)$.

109. $\left(\frac{3a^3}{b^3} + \frac{5ac^2}{2bd^2} + \frac{6a^2c}{b^2d} + \frac{5c^3}{d^3}\right) : \left(\frac{a}{4b} + \frac{c}{2d}\right)$.

110. $\left(\frac{15x^3}{4y^2} - \frac{15x}{7} - \frac{12y}{5} + \frac{48y^3}{35x^2}\right) : \left(\frac{5x^2}{2y} - \frac{8y^2}{5x}\right)$.

Bestimme den Wert folgender Funktionen:

111. $\frac{a}{m} \cdot x$ für $x = a;\ -m;\ -\frac{m}{a};\ \frac{3m}{5a}$.

112. $\frac{4(a-b)}{3(a+b)} \cdot x$ für $x = 3(a-b);\ -3(a+b);\ 6(a^2-b^2);\ -\frac{a+b}{a-b};\ \frac{a^2-b^2}{4}$.

113. $\frac{3b}{5c} : x$ für $x = b;\ -c;\ -9b;\ \frac{6b}{c^2};\ -\frac{9b^3}{25c^3}$.

114. $\frac{3a}{2b} : \frac{5x}{6c}$ für $x = 3c;\ -9a;\ 10b^2;\ -\frac{9c^2}{20b^2};\ \frac{54a^2c^2}{35b^2}$.

---

§ 25.

Addition und Subtraktion von Brüchen.

A. Gleichnamige Brüche.

1. $\frac{5a}{7} + \frac{3a}{7} - \frac{6a}{7}$.

2. $\frac{13c}{n} - \frac{7c}{n} + \frac{14c}{n}$.

3. $\frac{11b}{5a} - \frac{17b}{5a} - \frac{26b}{5a} + \frac{22b}{5a}$.

4. $\frac{25x}{n+1} + \frac{36x}{n+1} - \frac{19x}{n+1} - \frac{22x}{n+1}$.

5. $\frac{3a-5b}{x-3} + \frac{11a+13b}{x-3} + \frac{17a-25b}{x-3}$.

6. $\frac{42a+37b}{20z} - \frac{36a-25b}{20z} + \frac{11a-75b}{20z} - \frac{7a+2b}{20z}$.

7. $\frac{12a^2-7c^2}{28b} + \frac{8a^2+11c^2}{28b} - \frac{7a^2-3c^2}{28b} + \frac{8a^2+7c^2}{28b}$.

8. $\frac{10x + 7y}{6(u - v)} - \frac{13y - 9x}{6(u - v)} + \frac{11x - 15y}{6(u - v)} - \frac{18x + 27y}{6(u - v)}$.

9. $\frac{8x^2 - 5y^2}{5xy} + \frac{4y^2 + 9x^2}{5xy} - \frac{2x^2 + 7y^2}{5xy} - \frac{5x^2 - 8y^2}{5xy}$.

10. $\frac{15x^2 + 9y^2}{7xy} - \frac{7x^2 - 3y^2}{7xy} - \frac{5x^2 + 8y^2}{7xy} - \frac{3x^2 - 17y^2}{7xy}$

11. $\frac{(2x + 3y)^2}{6xy} - \frac{(2x - 3y)^2}{6xy}$.

12. $\frac{(5p - 3q)^2}{4q} - \frac{(5p + 3q)^2}{4q}$.

13. $\frac{(3a - 4b)^2}{ab} + \frac{12b(4a + 1)}{ab} - \frac{(3a + 4b)^2}{ab}$.

14. Bestimme den Wert der Funktion:

1) $y = \frac{3x}{5a} - \frac{7b}{5a}$ für $x = 3b; -5b;$

2) $y = \frac{3a + 2x}{7} - \frac{5a - 3x}{7}$ für $x = -a; 4a; -10$.

B. Ungleichnamige Brüche.

15. $\frac{2a + 3b}{8} + \frac{a - 3b}{4}$.

16. $\frac{4a - 3b}{6} + \frac{5a + 6b}{2}$.

17. $\frac{9p + 5q}{5} + \frac{22p - 25q}{10}$.

18. $\frac{18m - 17n}{42} - \frac{6m - 13n}{14}$.

19. $\frac{2a + 3b}{4} - \frac{3a + 5b}{3} + \frac{9a + 8b}{12}$.

20. $\frac{6x - 5y}{5} + \frac{3(5x - 7y)}{20} - \frac{7x - 9y}{4}$.

21. $\frac{3(12c - 17d)}{85} + \frac{5d - 6c}{5} + \frac{21d - 11c}{17}$.

22. $\frac{6a + 3b - 5c}{8} - \frac{9a - 7b + 8c}{24} - \frac{3a + 2b - 4c}{3}$.

23. $\frac{8x - 5y + 2z}{7} - \frac{5x - 3y + 2z}{5} + \frac{8x + 7y - 9z}{35}$.

24. $\frac{3a}{x} + \frac{2b}{y} - \frac{6c}{xy}$.

25. $\frac{1}{a^3} + \frac{1}{a^2} - \frac{1}{a}$.

26. $\frac{12}{a} + \frac{8}{a^2} + \frac{4}{a^3}$.

27. $\frac{7b}{6c} - \frac{11b}{24cd} + \frac{5b}{4d}$.

28. $\frac{8a}{5y} + \frac{4a}{3x^2} + \frac{16a}{15x^2y}$.

29. $\frac{6a^2 - 7b^2}{24ab^2} - \frac{a - 2b^2}{4b^2} + \frac{2 - 3a}{6a}$.

30. $\frac{6m+5n}{9}-\frac{9m-11n}{45}-\frac{3m+8n}{15}+\frac{7m-9n}{3}$.

31. $\frac{6p-5q}{15}-\frac{3p-2q}{4}+\frac{4q-7p}{60}-\frac{7q-8p}{10}$.

32. $\frac{9x+11y}{16}-\frac{8x-5y}{96}-\frac{6x+7y}{48}+\frac{3x-8y}{24}$.

33. $\frac{7}{5x}-\frac{9}{20x}+\frac{5}{4x}$.

34. $\frac{a}{12b}+\frac{5a}{6b}-\frac{13a}{48b}$.

35. $\frac{5a}{9m}-\frac{7}{36m}+\frac{11}{12m}$.

36. $\frac{1}{6xy}+\frac{5}{6x}+\frac{2}{3y}$.

37. $\frac{5}{6xy}+\frac{3}{4}-\frac{7}{12xy}$.

38. $\frac{5x}{ab}-\frac{2x}{abc}+\frac{3x}{bc}$.

39. $\frac{8a}{x^4}-\frac{3a}{x^5}+\frac{6a}{x^3}$.

40. $\frac{1}{m}-\frac{1}{m^2}+\frac{1}{m^3}-\frac{1}{m^4}$.

41. $\frac{3m}{5a}-\frac{7m}{10a^2}+\frac{5m}{2a^2}$.

42. $\frac{5+x}{5x}-\frac{3-x}{30x}-\frac{7+x}{10}$.

43. $\frac{3a+4}{2a}-\frac{3a+2}{4a}-\frac{12b+a}{8ab}$.

---

44. $\frac{3a}{2}-\frac{2a}{3}+\frac{5a}{4}$.

45. $\frac{9a}{4}+\frac{4a}{3}-\frac{5a}{6}$.

46. $\frac{a-b}{12}-\frac{a+b}{8}+\frac{a-b}{6}$.

47. $\frac{2a+3b}{9}-b+\frac{4a-3b}{15}+a$.

48. $\frac{3x+2y}{12}-\frac{2x-y}{10}+\frac{4x-5y}{5}$.

49. $\frac{a+b+c}{8}-\frac{a-b+c}{3}+\frac{a+b-c}{12}$.

50. $\frac{2p+3q+r}{9}+q+\frac{p-2q-3r}{4}-\frac{3p+4q-2r}{12}-r$.

51. $\frac{7m-3n+4q}{20}-\frac{5m+4n-6q}{25}+\frac{2m+3n-7q}{50}+n$.

52. $\frac{2a-b}{4}-\frac{a-2b}{3}+\frac{3a+4b}{8}-\frac{2a+3b}{6}$.

53. $\frac{3m+2n}{5}+\frac{4m-5n}{3}-\frac{2m-3n}{2}-\frac{5m+2n}{6}$.

54. $\frac{4c-3d+6e}{12}-\frac{2c+d-3e}{5}-e+\frac{5c-2d-3e}{5}-\frac{c-4d+2e}{15}.$

55. $\frac{2x-y+5z}{24}-\frac{x+3y-4z}{16}+\frac{4x+5y-3z}{32}-\frac{3x+4y+2z}{48}.$

56. $\frac{5}{xy}-\frac{3}{xz}+\frac{4}{yz}.$

57. $\frac{7}{ab}+\frac{5}{ac}-\frac{8}{bc}.$

58. $\frac{5}{p}-\frac{11}{q}-\frac{8}{r}.$

59. $\frac{4}{a}+\frac{2}{b}-\frac{5}{c}.$

60. $\frac{13}{x}-\frac{9}{xy}+\frac{10}{z}.$

61. $\frac{a}{xy}+\frac{b}{xz}+\frac{c}{yz}.$

62. $\frac{x}{bc}-\frac{y}{bd}+\frac{z}{cd}.$

63. $\frac{2a}{pq}-\frac{5b}{qr}-\frac{4c}{pr}$

64. $\frac{12b}{x}+\frac{20bc}{yz}+\frac{16a}{y}.$

65. $\frac{5b}{2a}+\frac{7a^2}{6ab}+\frac{5a}{4b}.$

66. $\frac{3c}{5d}-\frac{5d}{6c}+\frac{12c^2}{10cd}.$

67. $\frac{9x}{2a}-\frac{5x^2}{4a^2}+\frac{7x^3}{3a^3}.$

68. $\frac{a+b}{a}+\frac{a^2-b^2}{bc}-\frac{a+b}{b}$

69. $\frac{11x^2+18y^2}{15xy}-\frac{6y}{5x}-\frac{5x}{9y}.$

70. $\frac{5a-2b}{3a}-\frac{2a+5b}{4b}+\frac{a^2+2b^2}{2ab}$

71. $\frac{2m-n}{8m}+\frac{9m^2+5n^2}{12mn}-\frac{3m+4n}{4n}$

72. $\frac{x-2y}{3x}+\frac{2x+3z}{2z}-\frac{3x}{4yz}-1.$

73. $\frac{3a-4b}{3a}-\frac{a+b}{a}+\frac{2a^2+3b^2}{2ab}-\frac{a-3b}{b}.$

74. $\frac{4b-7a}{5a}+\frac{2a+5b}{4b}-\frac{a^2-b^2}{3ab}+\frac{8}{15}.$

75. $\frac{3a}{8b}+\frac{7b-5a}{24a}-\frac{5}{12}+\frac{5b-3a}{8b}.$

76. $\frac{7x^2-3y}{6x^2y}+\frac{1}{2x^2}+\frac{11y^2-7x^2}{12xy^2}+\frac{7x}{12y^2}.$

77. $\frac{3x-2y}{4xy^2}-\frac{5y^2+3x}{12xy^2}+\frac{5y+6x}{12x^2y}-\frac{7y+3}{6y^2}.$

78. $\frac{2a^2+3ab-3b}{12a^2b}+\frac{3}{8}-\frac{3ab+a+2b}{8ab}$

79. $\frac{3a-2ab^2+4b}{5ab^2}-\frac{9-11b^2}{15b^2}-\frac{5a+2a^2b-3b}{6a^2b}.$

80. $\frac{1}{2y^2} - \frac{y(x+3)}{x^2} - 2\frac{1}{2} + \frac{6y+2xy+5x^2}{2x^2}$.

81. $\frac{7x-5xy+9y}{25x^2y} + \frac{4x-3y}{5xy} - \frac{4x+3xy-5y}{15xy^2} - \frac{3x-4y}{5xy}$.

Siehe die Gleichungen § 27, Nr. 237 bis 329.

---

82. $\frac{5}{x} + \frac{3}{x+y}$.

83. $\frac{3}{x} + \frac{4}{x-y}$.

84. $\frac{5}{x+y} - \frac{2}{x}$.

85. $\frac{7}{x-y} - \frac{3}{y}$.

86. $\frac{9}{m} - \frac{5}{m+n}$.

87. $\frac{8}{m} - \frac{4}{m-n}$

88. $\frac{3}{a+b} - \frac{2}{a}$.

89. $\frac{5}{c} - \frac{7}{c-d}$.

90. $\frac{11}{2a-3b} + \frac{5}{b}$.

91. $\frac{4}{3x-5y} + \frac{7}{x}$

92. $\frac{9}{5c-3d} - \frac{7}{3c}$.

93. $\frac{5}{x} - \frac{2}{3x-2y}$.

94. $\frac{3}{2x} + \frac{5}{2x-3y}$.

95. $\frac{x}{y} + \frac{x-y}{x+y}$.

96. $\frac{x}{y} - \frac{x-y}{x+y}$.

97. $\frac{x}{y} - \frac{x+y}{x-y}$.

98. $\frac{m-n}{m} - \frac{m}{m+n}$.

99. $\frac{m}{m-n} + \frac{m+n}{m}$.

100. $\frac{b+c}{c} - \frac{2b}{b+c}$.

101. $\frac{b-c}{b} - \frac{b-c}{b+c}$.

102. $\frac{2a}{3b} - \frac{2(a-b)}{2a+3b}$.

103. $\frac{5m}{3n} - \frac{5m+4n}{5m+3n}$.

104. $\frac{3}{4p} - \frac{9+4q}{12p-5q}$.

105. $\frac{3x+2y}{3x} - \frac{2y}{3x-2y}$.

106. $\frac{5a-3b}{3b} + \frac{2a}{5a+3b}$.

107. $\frac{4m}{7m+3n} + \frac{7m+3n}{5m}$.

108. $\frac{2c-3d}{2c+3d} - \frac{2c-3d}{4c}$.

Siehe die Gleichungen § 27, Nr. 330 bis 354.

---

109. $\frac{x}{x-y} + \frac{y}{x+y}$.

110. $\frac{x}{x+y} + \frac{y}{x-y}$.

111. $\frac{y}{x+y} - \frac{x}{x-y}$.

112. $\frac{3a}{a+b} - \frac{3a}{a-b}$.

113. $\frac{2x}{x+y} - \frac{3y}{x-y}$.

114. $\frac{x+y}{x-y} + \frac{x-y}{x+y}$.

115. $\frac{x-y}{x+y} - \frac{x+y}{x-y}$.

116. $\frac{2a+3b}{a+b} - \frac{2a-3b}{a-b}$.

117. $\frac{5m+4n}{2m+3n} - \frac{2m-3n}{5m-4n}$.

118. $\frac{7c-9d}{6c-5d} - \frac{6c+5d}{7c+9d}$.

119. $\frac{5a-3b}{2a+5b} - \frac{3a+4b}{5a-4b}$.

120. $\frac{3x+2y}{3x-2y} + \frac{3x-2y}{3x+2y}$.

121. $\frac{5a+7b}{5a-7b} - \frac{5a-7b}{5a+7b}$.

122. $\frac{3}{2a+3} + \frac{2}{3a+4} - \frac{1}{4a+1}$.

123. $\frac{x}{x+y} - \frac{y}{x+z} - \frac{z}{y+z}$.

124. $\frac{2x}{x-y} + \frac{5y}{y-x}$.

125. $\frac{4c}{b-c} - \frac{2b}{c-b}$.

126. $\frac{5m}{m-n} + \frac{5n}{n-m}$.

127. $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{a-b} + \frac{1}{b-a}$.

128. $\frac{3}{x-y} + \frac{2}{x-z} + \frac{1}{y-x}$.

---

129. $\frac{3}{4(x-1)} + \frac{2}{3(x-1)} - \frac{1}{2(x-1)}$.

130. $\frac{7}{8(a-b)} - \frac{3}{4(a-b)} + \frac{5}{6(a-b)}$.

131. $\frac{4}{x^2+xy} - \frac{8}{3x+3y} + \frac{12}{5xy+5y^2}$.

132. $\frac{7x}{6x-6y} + \frac{5y}{2x-2y} - \frac{2y}{3x-3y}$.

133. $\frac{a}{3a+3b} - \frac{2b}{5a+5b} + \frac{3b}{10a+10b}$

134. $\frac{5a}{3x+1} - \frac{7a}{3x^2+x}$.

135. $\frac{3c}{ac-a^2} - \frac{3a}{c^2-ac}$.

136. $\frac{2m+5n}{9m(3m-2n)} + \frac{4m-7n}{5n(3m-2n)} + \frac{4(2n-3m)}{15m(3m-2n)}$

137. $\frac{2m-n}{5m+5n} + \frac{m+n}{12m+12n} - \frac{m-n}{15m+15n}$

138. $\frac{7c+9d}{8c-8d} - \frac{2c+5d}{16c-16d} - \frac{5c+3d}{12c-12d}$

Siehe die Gleichungen § 27, Nr. 355—379.

139. $\frac{a+2}{a+3} - \frac{a^2+3+4a}{(a+2)(a+3)}$.

140. $\frac{a^2-2a-23}{(a-7)(a+5)} - \frac{a+4}{a+5}$.

141. $\frac{2x^2+5x-7}{(x+8)(x-1)} - \frac{2x+3}{x+8}$.

142. $\frac{2x-3}{x+5} - \frac{7x^2+25x-11}{(x+5)(x+2)} + \frac{5x-1}{x+2}$.

143. $\frac{5m+7}{m-3} - \frac{2m^2+57m+11}{(m-3)(m+7)} - \frac{3m-8}{m+7}$.

144. $\frac{5b-3}{2b+5} + \frac{53b+23}{(2b+5)(3b-4)} - \frac{2b+7}{3b-4}$.

145. $\frac{5x+y}{2x+3y} - \frac{11x^2+9xy-7y^2}{(2x+3y)(3x-2y)} + \frac{2x+5y}{3x-2y}$.

146. $\frac{7p-2q}{5p-4q} + \frac{p^2-20pq-12q^2}{(5p-4q)(7p+2q)} - \frac{5p+4q}{7p+2q}$.

147. $\frac{3c-4d}{6c-5d} - \frac{27c^2-84cd+9d^2}{(6c-5d)(3c+4d)} + \frac{6c-5d}{3c+4d}$.

148. $\frac{2m+3n}{2(m-3n)} - \frac{7n(3m-11n)}{2(m-3n)(3m+5n)} - \frac{3m-7n}{3m+5n}$.

---

149. $\frac{1}{a-b} - \frac{2b}{a^2-b^2}$.

150. $\frac{a^2+1}{a^2-1} - \frac{a+1}{a-1}$.

151. $\frac{a-b}{a+b} - \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$.

152. $\frac{x-3}{x+3} + \frac{6x}{x^2-9}$.

153. $\frac{2a}{a+2} - \frac{7a^2+5a}{a^2-4} + \frac{5a}{a-2}$.

154. $\frac{4c}{c-5} + \frac{6c^2}{c^2-25} - \frac{3c}{c+5}$.

155. $\frac{5m}{2m+3n} + \frac{3n}{2m-3n} - \frac{3n(3n-8m)}{4m^2-9n^2}$.

156. $\frac{2x(x-4y)}{x^2-y^2} - \frac{3x-2y}{x+y} + \frac{2x+3y}{x-y}$.

157. $\frac{2p+3}{3p-1} - \frac{5p-2}{3p+1} + \frac{p(9p-22)}{9p^2-1}$.

158. $\frac{2a+3x}{3a+4x} + \frac{18a^2+7ax-4x^2}{9a^2-16x^2} - \frac{5a-2x}{3a-4x}$.

159. $\frac{a+3}{(a-4)^2} - \frac{a-3}{a^2-16}$.

160. $\frac{3x-4}{(x-5)^2} - \frac{3x+4}{x^2-25}$.

161. $\frac{1}{(a+b)^2} - \frac{1}{(a-b)^2} + \frac{1}{a^2-b^2}$.

162. $\frac{3x}{x^2-4x+4} - \frac{2x}{x^2+4x+4} - \frac{4}{x^2-4}$.

163. $\frac{3}{3x-2} - \frac{7}{9x^2-4} - \frac{5}{9x^2+12x+4} - \frac{2}{3x+2}$.

164. $\frac{2a}{5-2a} - \frac{2a^2}{25-20a+4a^2} + \frac{3a}{5+2a} - \frac{5a}{25-4a^2}$.

Siehe die Gleichungen § 27, Nr. 380 bis 396.

IX.

§ 26.

Proportionen.

Die folgenden Verhältnisse sollen durch die kleinsten ganzen Zahlen ausgedrückt werden:

1. 85 : 136.
2. 1125 : 750.
3. 24,7 : 32,5.
4. 19,8 : 12,6.
5. $\frac{3}{5} : 7$.
6. $8 : \frac{3}{4}$.
7. $\frac{2}{3} : \frac{5}{7}$.
8. $1\frac{5}{8} : 2\frac{1}{2}$.
9. $3\frac{4}{5} : 2\frac{1}{4}$.
10. 65 g : 91 g.
11. 114 hl : 57 hl.
12. 98 qcm : 154 qcm.
13. 3,5 M : 4,2 M.
14. 5,2 m : 117 cm.
15. 6,4 kg : 3200 g.
16. $25a^2b : 75ab$.
17. $78p^2 : 52p^3$.
18. $64m^2n^2 : 96mn^2$.
19. $0{,}35c^2 : 0{,}45c$.
20. $8{,}5bc : 11{,}9$
21. $0{,}4cd : 0{,}36d^2$.
22. $\frac{a}{2} : \frac{c}{3}$.
23. $\frac{3m}{5} : \frac{2m}{3}$.
24. $2\frac{1}{3}p^2q : 1\frac{1}{5}pq^2$
25. $\frac{a-b}{4} : \frac{a^2-b^2}{2}$.
26. $\frac{m^2-n^2}{3} : \frac{m+n}{2}$.
27. $\frac{(c-d)^2}{4} : \frac{c^2-d^2}{5}$
28. Die in Nr. 1—27 gegebenen Verhältnisse sind so umzugestalten, daß das erste Glied $= 1$ wird.
29. Die in Nr. 1—27 gegebenen Verhältnisse sind so umzugestalten, daß das zweite Glied $= 1$ wird.

Prüfe die Richtigkeit der folgenden Proportionen durch Bestimmung der beiden Verhältniszahlen:

30. 45 : 75 = 21 : 35.
31. 26 kg : 65 kg = 28 : 70.
32. 65 : 52 = 15 m : 10 m.
33. 119 : 153 = 105 : 135.
34. 3,5 : 4,9 = 8,4 : 9,8.
35. 11,2 g : 12,8 g = 8,4 qm : 9,6 qm.
36. $2\frac{1}{2}l : 3\frac{1}{4}l = 5 : 6\frac{1}{4}$.
37. $2\frac{1}{5} : 3\frac{1}{3} = 3\frac{3}{10} : 5$.
38. $(a+b)^2 : (a^2-b^2) = (a+b) : (a-b)$.
39. $(a^4-b^4) : (a^2-b^2) = (a^2+b^2) : (a-b)$.

40. $(a^2 + b^2) : (a^4 - b^4) = 1 : (a^2 - b^2)$.

41. $(a^2 - b^2) : (a - b)^2 = (a + b) : (a - b)$.

Bilde die Produktengleichung und untersuche, welche der folgenden Proportionen richtig sind:

42. $3 : 6 = 5 : 10$.

43. $2a : 5a^2 = 8a^2 : 20a^3$

44. $3 : 4 = 11 : 12$.

45. $56 : 35 = 72\,kg : 45\,kg$.

46. $\frac{63}{77} = \frac{36}{44}$.

47. $\frac{8,5}{11,9} = \frac{6,5}{9,1}$.

48. $1,2\,m : 4\,m = 10\frac{1}{2}\,t : 15\,t$.

49. $4,9a : 7a^2 = 3\frac{1}{2}a^2 : 5a^3$.

50. $4\frac{1}{3}\,cm : 5\,cm = 5 : 3\frac{1}{5}$

51. $\frac{8}{3}p : 2q = 10γ\,q : 7,5q^2$.

Aus den folgenden Gleichungen Proportionen zu bilden:

52. $7p = 8q$.

53. $3m = 4,5n$.

54. $3a = 4b$

55. $3c = 5,2d$.

56. $2\frac{1}{3}u = 3\frac{1}{2}v$.

57. $(m^2 - n^2) = a \quad b$

58. Aus folgenden Proportionen sollen neue Proportionen gebildet werden:
1) durch Vertauschung der äußeren Glieder;
2) durch Vertauschung der inneren Glieder:
a) $4 : 5 = 16 : 20$.
b) $3p : 7q = 18p : 42q$.
c) $a : 2b^2 = 7a^2 : 14b^3$
d) $45m^2 : 35mn = 63mn^2 : 49n^3$.

Bilde aus den 4 gegebenen Zahlen eine Proportion. Setze bei den Aufgaben in bestimmten Zahlen die kleinste Zahl als erstes Glied:

59. 91; 78; 66; 77.

60. 75; 85; 68; 60

61. 45; 35; 119; 153.

62. 133; 34; 119; 38.

63. a^3b^2; a^2b^2; a^3b; a^2b.

64. $(a + b)^2$; $(a + b)$; $(a^2 - b^2)$; $a - b$.

65. Man soll aus den Brüchen $\frac{2}{3}$; $\frac{8}{12}$ und $\frac{14}{21}$ einen neuen Bruch bilden, dessen Zähler eine algebraische Summe der drei gegebenen Zähler, dessen Nenner die *entsprechende* algebraische Summe der drei gegebenen Nenner ist. Wieviel Fälle sind möglich? Untersuche den Wert eines jeden neuen Bruches.

66. Dieselbe Aufgabe für $\frac{3}{5}$; $\frac{18}{30}$ und $\frac{27}{45}$.

Aus folgenden Proportionen x zu bestimmen:

67. $15 : 20 = 9 : x$.

68. $10 : x = 18 : 9$

69. $8 : 9 = x : 18$.

70. $24 : 16 = x : 4$.

71. $x : 126 = 144 : 112$.

72. $51 : x = 39 : 104$.

73. $9x : 110 = 144 : 176.$

74. $108 : 126 = 2x : 84.$

75. $1{,}5 : 2{,}7 = 0{,}5x : 4{,}5.$

76. $4{,}2 : 0{,}7x = 5{,}4 : 0{,}9.$

77. $3\frac{1}{2} : 4\frac{1}{5} = 2\frac{1}{2} : 3x.$

78. $10\frac{4}{5} : 19\frac{4}{5} = 2x : 15\frac{2}{5}.$

79. $\frac{3}{5} : b = \frac{6}{7} : x.$

80. $2\frac{1}{3} : 4x = 3\frac{1}{2} : 2a.$

81. $\frac{3a^2}{4b} : \frac{5b}{6a^2} = x : \frac{10b^3}{3a^5}.$

82. $\frac{5a^2}{3b^2} : \frac{10a^2}{7b} = \frac{7b}{2} \cdot x : \frac{3b^3}{a}.$

83. $\frac{12p^2q}{5} : \frac{6p^4}{5q^3} = \frac{5qx}{2p^3} : \frac{15p^3}{4q^2}.$

84. $\frac{7a^2b}{5c^2} : \frac{2b^3x}{5c^3} = \frac{a}{4c} : \frac{11b^2}{14c^2}.$

85. $\frac{3c}{a^2 - b^2} : \frac{15c}{a + b} = \frac{a - b}{8cd} : \frac{(a - b)^2x}{4d}.$

86. $\frac{14px}{25p^2 - 16q^2} : \frac{28pq}{(5p - 4q)^2} = \frac{5p + 4q}{2} : \frac{q}{5p - 4q}.$

87. $\frac{2a + 3b}{4a^2 - 12ab + 9b^2} : \frac{4a^2 - 9b^2}{4a^2 + 9b^2} = \frac{x}{2a - 3b} : \frac{2a - 3b}{2a + 3b}.$

88. $\frac{3a}{4a + 5b} x : \frac{3(a + b)}{4b} = \frac{6a^2}{16a^2 - 25b^2} : \frac{12a}{4a - 5b}.$

89. $\frac{5m}{2m + n} : \frac{3}{2(n - 2m)} = \frac{10m^3}{2m + n} : \frac{(n^2 - 4m^2)x}{m^2}.$

90. $(3a - 2b)x : \frac{9a^2 - 4b^2}{21a + 28b} = \frac{6a + 8b}{3a + 2b} : \frac{2(2a + 3b)}{7(4a^2 - 9b^2)}.$

91. $\frac{5a(a - 2b)}{6(a + b)} \cdot \frac{10(a + 2b)x}{3(2b - a)} = \frac{5a(a^2 + b)}{4(a^2 - 4b^2)} : \frac{20(a + b)}{2b - a}.$

---

92. $3 : 5 = x : (x + 40).$

93. $5 : 2 = x : (x - 51).$

94. $12 : 11 = x : (x - 1).$

95. $10 : 11 = (x - 10) : x.$

96. $a : b = x : (x - a).$

97. $(a + b) : b = (x - b) : x.$

98. $3 : 7 = x : (2x + 11).$

99. $3 : 4 = (x - 12) : x.$

100. $x : (x - 8) = 4 : 3.$

101. $x : (2x + 7) = 3 : 7.$

102. $5 : 2 = 3(x - 2) : x.$

103. $8 : 3 = (3x - 20) : x.$

104. $a : x = b : (x + a).$

105. $a : b = (x - b) : (x - a)$

106. $(x - 3) : (x + 4) = (x - 6) : (x - 2).$

107. $(x - 2) : (x + 3) = (x - 4) : (x - 1).$

108. $(x + 3) : (x + 8) = (x - 9) : (x - 8).$

109. $(x + 7) : (x + 18) = (x + 3) : (x + 12).$

110. $(x - 4) : (x + 2) = (x - 6) : (x - 1).$

111. $(x - 2) : (x + 3) = (x - 1) : (x + 5).$

112. $(x + a) : (x - a) = (x + b) : (x - b).$

113. $(x - a) : (x - c) = (x - a) : (x - b)$.
114. $(x + 18) : (3x - 26) = 3 : 4$.
115. $(2x + 1) : (4x - 1) = 5 : 7$.
116. $(7x + 3) : (13x - 6) = 8 : 11$.
117. $(2x + 13) : (2x - 7) = 7 : 3$.
118. $2(x + 1) : (4x - 1) = 2 : 3$.
119. $2(2x + 1) : 4(2x - 1) = 7 : 10$.
120. $(x + 1{,}4) : (x + 3{,}2) = 3 : 4$.
121. $x : (x - 0{,}3) = (2x + 0{,}8) : 2x$.
122. $(x - 0{,}8) : (x + 3{,}4) = (x - 1{,}7) : (x + 1{,}6)$.
123. $(x + 3{,}6) : (x - 0{,}8) = (x + 0{,}3) : (x - 1{,}9)$.
124. $(x - \frac{3}{4}) : (x + \frac{3}{4}) = (x - 2) : (x - 1\frac{1}{4})$.
125. $(x + 1\frac{1}{2}) : (x + \frac{1}{2}) = (x - \frac{1}{6}) : (x - \frac{1}{2})$.
126. $(x - 4a) : (x - 3a) = (x - a) : (x + a)$.
127. $(2x + b) : (3x + 4b) = 2x : (3x + 2b)$.

Siehe die Gleichungen § 29, Nr. 47—54.

Bestimme x und y aus folgenden Proportionen:

128. $(x + 4y) : (4x + y) = 2 : 3$.
$(5x + 2) : (4y + 11) = 4 : 5$.
129. $(x + 5) : (y + 4) = 4 : 3$.
$(3y + 4) : (x + 2) = 2 : 1$.
130. $(3x - 2) : (3y + 1) = 1 : 4$.
$(5x - 1) : (4y - 5) = 3 : 5$.
131. $(2x + y + 4) : (3x - y - 3) = 5 : 2$.
$(3x - 5y + 7) : (5x - 3y + 1) = 1 : 3$.
132. $(2x + 3y - 1) : (3x + 8y + 7) = 2 : 7$.
$(4x - 3y + 4) : (2x + 5y + 6) = 3 : 5$.

Bestimme x aus folgenden stetigen Proportionen:

133. $x : 4 = 4 : 8$.
134. $x : 3 = 3 : 9$.
135. $x : 5 = 5 : 25$.
136. $16 : 8 = 8 : x$.
137. $8 : 12 = 12 : x$.
138. $x : 12 = 12 : 16$.
139. $(2x + 1) : 6 = 6 : 4$.
140. $5 : 10 = 10 : 2(3x + 4)$.
141. $2 : 8 = 8 : 2(9x + 10)$.
142. $(13x + 1) : 7 = 7 : 10$.

Suche die mittlere Proportionale zwischen:

143. 4 und 9. **144.** 25 und 4. **145.** $6\frac{1}{4}$ und 4.

146. 9 und 16 **147.** 16 und 100 **148.** 9c und 4c.

149. 25 und $9y^2$. **150.** 4a und $49ab^2$

151. Unter Anwendung des Satzes von der „korrespondierenden Addition und Subtraktion" aus jeder der folgenden Proportionen drei andere zu bilden:

a) $18:6 = 30:10$. b) $35:14 = 55:22$.

c) $21a:12a = 35b^2:20b^2$. d) $20x^3:45x^3 = 36y^2:81y^2$.

152. Unter Anwendung desselben Satzes die folgenden Proportionen so zu vereinfachen, daß x nur einmal vorkommt:

a) $(a + x):x = c:d$ b) $m:n = (a - x):x$.

c) $(x - y):x = (m - n):n$. d) $(b + c):c = (a + x):x$.

Siehe die Gleichungen § 27, Nr. 343 bis 349 u. Nr. 373 bis 375.

153. Die Größen 2x und 3y verhalten sich zueinander wie 1 : 2. Berechne die Funktion y für x = — 12; — 9; — 6; — 3; 0; 3; 6; 9; 12 und zeichne die Gerade.

Bestimme aus den folgenden Proportionen die Funktionsgleichung für y und löse dieselbe graphisch:

154. $3x:y = 6:2$. **155.** $1:3 = x:y$.

156. $x:y = 2:5$. **157.** $4:5 = 2x:5y$.

158. $(x + 2):1 = (y - 1):3$. **159.** $1:(x + 4) = 2:(y + 9)$.

---

160. Das Luftschiff „Zeppelin I" hat eine Eigengeschwindigkeit*) von 45 km in der Stunde. Wie groß ist die Eigengeschwindigkeit des „Zeppelin III", wenn sich dieselbe zu derjenigen des „Zeppelin I" wie 10 : 9 verhält?

161. Die Flußlängen von Rhein und Elbe verhalten sich wie 6 : 5. Die Elbe ist 1100 km lang. Wie lang ist der Rhein?

162. Die Entfernungen der Planeten Erde und Venus von der Sonne verhalten sich wie $5 : 3\frac{3}{5}$. Die Venus ist 108 Millionen km von der Sonne entfernt, wie weit die Erde?

---

*) Eigengeschwindigkeit ist die vom Luftschiff im Luftmeer zurückgelegte Strecke, welche stets gleich bleibt, vorausgesetzt, daß die Motoren gleichmäßig arbeiten. Sie ist nicht zu verwechseln mit der „Fahrtgeschwindigkeit", d. i. die in bezug auf die Erde zurückgelegte Strecke des Luftschiffes, welche veränderlich ist und von der Windgeschwindigkeit und Windrichtung abhängt.

163. Das Ulmer Münster ist 162 m hoch. Seine Höhe verhält sich zu derjenigen des Niederwalddenkmals wie 54 : 11,5. Wie hoch ist letzteres?

164. Ein Schornstein wirft einen Schatten von 55 m Länge, während der Schatten einer Stange von 60 cm Länge zu derselben Zeit 1,5 m mißt. Wie hoch ist der Schornstein?

165. Der Schatten eines Denkmals von 9,6 m Höhe mißt 6 m, der einer dahinterstehenden Pappel 10 m. Wie hoch ist der Baum?

166. Ende 1905 kam in Deutschland auf je 100 qkm eine Eisenbahnlänge von 10,4 km. Wieviel km kamen in Großbritannien auf 100 qkm, wenn sich die Länge der dort im Betriebe befindlichen Eisenbahnen zu der Deutschlands wie 29 : 26 verhielt?

167. Die Länge des Nils verhält sich zu der des Amazonenstromes wie 12 : 11. Beide haben zusammen eine Stromlänge von 11500 km. Wie lang ist jeder?

168. Die Höhe des Kölner Domes verhält sich zu derjenigen der Paulskirche in London wie 79 : 61,5. Wie hoch ist jede der beiden Kathedralen, wenn sie zusammen 281 m hoch sind?

169. Kamerun hat $2\frac{1}{2}$ Millionen Einwohner mehr als Togo. Die Einwohnerzahlen der beiden Kolonien verhalten sich wie 7 : 2. Wieviel Einwohner hat jede?

170. Die Gipfelhöhen von Zugspitze und Watzmann verhalten sich wie $1 : \frac{9}{10}$. Wie hoch ist jeder der Berge, wenn sie zusammen 5700 m hoch sind?

171. Zu einem Kleide werden 6 m Stoff zu 110 cm Breite gebraucht. Wieviel m sind erforderlich, wenn der Stoff 120 cm breit liegt?

172. Ein Stück Wollstoff, 25 m lang, kostet 65 *M*. Wie teuer sind 6 m?

173. Wieviel sind für $1\frac{3}{4}$ Schock Eier zu zahlen, wenn eine Mandel 1,35 *M* kostet?

174. An 453 *M* werden 36,24 *M* verdient. Wieviel Prozent sind gewonnen?

175. Wieviel Prozent beträgt die Tara, wenn das Bruttogewicht 240 kg, das Gewicht der Verpackung 16,80 kg beträgt?

176. Bei einer täglichen Ausgabe von 7 *M* reicht jemand mit seinem Reisegelde 16 Tage. Wie lange würde er reichen, wenn er täglich durchschnittlich 8 *M* ausgeben würde?

177. Im Juli 1909 überflog der Franzose Blériot den Ärmelkanal zwischen Calais und Dover in 25 Minuten.*) Wie lange fahren die schnellsten

*) Abgerundeter Wert.

Passagierdampfer der Strecke, wenn sich ihre Geschwindigkeit zu der des Aviatikers wie 1 : 3 verhält?

178. Um eine bestimmte Strecke zurückzulegen, muß A 300 Schritte machen. Wieviel Schritte muß B machen, wenn sich seine Schrittweite zu der des A wie 6 : 5 verhält?

179. Wieviel Sovereigns erhält man für 510 ℳ. (Umrechnungssatz: £ 1 = 20,40 ℳ.)

180. Beim Umwechseln werden für je 21 ℳ 5 Dollars gegeben. Wieviel erhält man für 840 ℳ?

181. Wieviel Kronen würde man erhalten, wenn man 400 ℳ a) in österreichische Kronen, b) in skandinavische Kronen umwechselte, und wieviel Pfennige betrüge der Rest? (Umrechnungssätze: 1 österreichische Krone = 0,85 ℳ, 1 skandinavische Krone = 1,12 ℳ.)

182. Eine Karte ist im Maßstab von 1 : 3000000 gezeichnet. Die Strecke Straßburg-Berlin mißt 19,5 cm. Wie groß ist die Entfernung der beiden Städte?

183. Die Strecke Hamburg-Bremen beträgt auf einer Karte, welche im Maßstabe von 1 : 750000 gezeichnet ist, 13 cm. a) Wie groß ist die Entfernung der beiden Orte? b) Wie verhält sich diese Entfernung zur Länge der Eisenbahnstrecke Hamburg-Bremen, welche 120 km beträgt?

184. Das vordere Rad eines Wagens hat einen Umfang von 2 m, das Hinterrad von 3 m. Wieviel Umdrehungen macht das Vorderrad, während sich das Hinterrad 160 mal dreht?

185. Ein Personenzug legt die Strecke Berlin-Hannover, die 252 km beträgt, in 7 Std. zurück, ein Schnellzug in $3\frac{1}{2}$ Std. Wieviel km legt dieser stündlich zurück?

186. Der D-Zug Berlin-Warnemünde legt die 224 km lange Strecke in 4 Stunden zurück. Wie lange wird die Dampffähre von Warnemünde nach Gjedser fahren, wenn die Entfernung der beiden Orte 23 Seemeilen (= 42 km) beträgt und sich die Geschwindigkeit der Fähre zu der jenes Zuges wie 3 : 8 verhält?

187. Eine Strecke von 24,5 cm ist im Verhältnis von 5 : 2 zu teilen. Wie groß ist jeder Abschnitt?

188. Zwei zusammenstoßende Seiten eines Parallelogramms verhalten sich wie 2 : 5. Die kleinere von ihnen mißt 4,2 cm. Wie groß ist der Umfang der Figur?

189. Zwei Nebenwinkel verhalten sich wie 4 : 5. Wie groß ist jeder von ihnen?

190. In einem gleichschenkligen Dreieck verhält sich der Winkel an der Spitze zur Summe der Basiswinkel wie 1 : 3. Wie groß ist ein Basiswinkel?

191. Der Umfang eines Dreiecks mißt 35 cm, die Summe der Seiten a und b beträgt 20 cm. Wie groß ist jede der drei Seiten, wenn sich a zu b wie 3 : 2 verhält?

192. Die Grundlinien eines Trapezes verhalten sich wie $1 : 2\frac{1}{4}$ und sind zusammen 39 m lang. Wie groß ist jede?

193. In einem Trapez ist die eine Grundlinie doppelt so groß wie die andere. Wie groß ist jede, wenn die Mittellinie 9,6 cm lang ist?

194. In einem Dreieck ist Seite a = 95 cm, Seite b = 76 cm. Die Höhen, welche zu diesen Seiten gehören, betragen zusammen 72 cm. Wie groß ist jede?

195. Die Summe der Grundlinien von zwei inhaltsgleichen Parallelogrammen beträgt 17 m, die zugehörigen Höhen sind 18 cm und 16 cm lang. Wie groß ist jede der Grundlinien?

196. Wie lang sind die Höhen von zwei inhaltsgleichen Parallelogrammen mit den Grundlinien a = 14 cm, $a_1 = 16$ cm, wenn die eine 1 cm länger ist als die andere?

X.

§ 27.

Gleichungen ersten Grades mit einer Unbekannten.*)

1. $x + 4 = 9$. **2.** $x + 3 = 7$. **3.** $x + 352 = 600$.
4. $x - 2 = 4$. **5.** $x - 5 = 3$. **6.** $x - 541 = 324$.
7. $8 + x = 12$. **8.** $13 + x = 22$. **9.** $225 + x = 375$.
10. $5x = 15 + 4x$. **11.** $6x = 5x + 4$. **12.** $3x + 7 = 2x + 20$.
13. $6x + 2 + 3x = 12 + 8x$.
14. $35x - 23 + 4x = 6 + 38x$.
15. $26x - 2 - 3x = 5 + 2x + 20x - 6$.
16. $x + 5{,}6 = 11$. **17.** $12{,}7 + x = 63{,}9$. **18.** $x - 42{,}35 = 42{,}65$
19. $x - 99{,}31 = 30{,}69$. **20.** $x + 3\frac{1}{2} = 8$. **21.** $2\frac{1}{3} + x = 6$.
22. $x - 3\frac{3}{4} = 8\frac{1}{4}$. **23.** $x - 15\frac{1}{2} = 9\frac{1}{2}$.

---

*) Einige der leichteren Aufgaben aus den einzelnen Teilen dieses Abschnitts sind sowohl graphisch wie rechnerisch zu lösen. Vgl. III, § 7.

24. $2\frac{1}{2}x + 6\frac{1}{4} = 1\frac{1}{2}x + 10$.
25. $3\frac{4}{5}x + 2\frac{1}{3} = 6 + \frac{2}{5}x + 12 + 2\frac{2}{5}x$.
26. $x + a = b$.
27. $b + x = c$.
28. $x + b - a = 3a + b$.
29. $2x - 3a + 4b = 6a + 2b + x$.

---

30. $2x = 8$.
31. $3x = 18$.
32. $12x = 78$.
33. $15x = 50$.
34. $1{,}2x = 3{,}6$.
35. $0{,}7x = 4{,}2$.
36. $2{,}7x = 8{,}1$.
37. $4{,}5x = 1{,}5$.
38. $9{,}6x = 4{,}8$.
39. $12x = 13{,}2$.
40. $7x = 5{,}6$.
41. $0{,}3x = 27$.
42. $0{,}9x = 108$.
43. $2{,}4x = 120$.
44. $40x = 3{,}2$.
45. $3\frac{1}{2}x = 2$.
46. $1\frac{1}{8}x = 16$.
47. $\frac{7}{5}x = 21$.
48. $6\frac{1}{4}x = 12\frac{1}{2}$.
49. $5\frac{4}{5}x = 17\frac{2}{5}$.
50. $ax = b$.
51. $2bx = 4b$.
52. $aex = f$.
53. $12bcx = 36abc$.
54. $8adx = 20ab$.

---

55. $2x + 3 = 7$
56. $5x + 6 = 26$.
57. $8 + 3x = 23$.
58. $9 + 4x = 41$.
59. $6x - 4 = 26$.
60. $15x - 13 = 62$.
61. $3x + 51 = 66$.
62. $33 + 3x = 51$.
63. $87 + 11x = 186$.
64. $3{,}7x + 2{,}5 = 9{,}90$.
65. $2{,}1x + 11{,}2 = 28$.
66. $6{,}3x - 9{,}7 = 21{,}80$.
67. $9{,}5 + 11x = 42{,}5$.
68. $8{,}75 = 93{,}75 - 5x$
69. $36{,}73 = 112{,}33 - 25{,}2x$.
70. $2\frac{1}{2}x + 4 = 19$.
71. $3\frac{1}{4}x + 5\frac{1}{3} = 31\frac{1}{8}$.
72. $4\frac{3}{8} + \frac{7}{9}x = 10\frac{1}{2}$.
73. $30\frac{7}{8} + 5\frac{1}{2}x = -35\frac{1}{8}$.
74. $2\frac{2}{3} + \frac{11}{30}x = 5\frac{3}{5}$.
75. $cx + ab = 3ab$.
76. $15bcx + 2abc = 32abc$.

---

77. $6x + 2x = 32$.
78. $9x + 15x = 72$.
79. $12x - 30 = 7x$.
80. $11x - 63 = 2x$.
81. $5x - 42 = 3x$.
82. $25x = 48 + 19x$.
83. $7x + 3 + 2x = 21$.
84. $11x + 4x + 7 = 67$.
85. $7x + 5 = 3x + 13$.
86. $9x + 16 = 2x + 65$
87. $12x - 3 = 9x + 6$.
88. $x - 8 = -6 - 5x$.
89. $8x - 25 = 3x + 5$.
90. $19x - 11 + 2x = 15x - 5$.
91. $6x - 12 + 5x = 3x + 2x + 30$.
92. $20 + 8x - 2 = 4x - 45 + 11x$.
93. $x - 20 - 16x = 100 - 20x - 9$.
94. $x = 7 - 5x + 80 + 53 - x$.
95. $x = 8x - 3x + 36 - 12x + 6$.
96. $3x + 5x - 6x + 18 = 9x - 70$.
97. $5x + 9x - 26 - 12x = 0$.

98. $3x + 15x - 11x = 169 - 6x$.
99. $0 = 100 + 6x - 20x + x - 22$
100. $17x + 125 - 12x - 31 - x + 250 - 38x - 4 = 0$.
101. $74x + 18 - 13x = 12x + 200 - 50x + 16$.
102. $10x - 365 + 75x - 15x = 61x + 98 - 160$.
103. $9x + 21 - 12x = 46 + 21x - 41$.
104. $3x + 2 + 7x - x = 1 - 3x - 12$.
105. $6x + 121 - 31x = 400 + 24x + 35x - 27$.
106. $12x - 9 - 28x = 32x - 4 - 52x$.
107. $6x + 133 + 48x = 18x + 91 + 2x - 111$.
108. $3{,}5x + 2{,}1x = 11{,}2$.
109. $8{,}3x + 5{,}25x = 27{,}1$.
110. $51x - 4{,}8x = 138{,}6$.
111. $2{,}1x + 21{,}25 + 2{,}3x = 38{,}85$
112. $86{,}2x + 33{,}12 - 12{,}05x = 107{,}27$.
113. $x - 10{,}5 + 15{,}30x = 100{,}20 - 12{,}20x + 31{,}80$.
114. $3{,}6x - 9{,}72 + 4{,}5x - 32{,}15 = -22{,}43$.
115. $52{,}3x + 11{,}45x - 30{,}15 - 33{,}60x = 0$.
116. $3\frac{1}{2}x + 6x = 57$.
117. $15x - 3\frac{1}{4} = 4\frac{1}{4}$.
118. $12 - 3\frac{1}{3}x = -1\frac{1}{3}$.
119. $12\frac{2}{15} - 2\frac{1}{2}x = -4\frac{1}{5}$.
120. $6\frac{1}{2}x - 7\frac{2}{5} = 2\frac{3}{4}x + 2\frac{3}{5}$.
121. $12\frac{1}{2}x - 2\frac{1}{8}x = 5\frac{1}{2}x + 9\frac{1}{3}$.
122. $\frac{1}{5} - \frac{2}{15}x + 5 = \frac{4}{5}x - 8 + \frac{3}{5}x - \frac{3}{5}$.
123. $\frac{1}{4}x - \frac{9}{2} + \frac{7}{2}x = 12 - \frac{1}{2}x + \frac{8}{4}$.
124. $\frac{7}{12}x + \frac{5}{18} - \frac{1}{3}x = 31 - \frac{3}{8}x - 18\frac{2}{9}$.
125. $ax + 3ax = c$.
126. $2bx + 7bx = 27a$.
127. $ax + 5 = b$.
128. $bx - c = a$.
129. $ax + b = 3ax - c$.
130. $cx - d = e - 4cx$.
131. $4ax - 2bc = 6bc - ax$.
132. $25abx - 14c = 16abx + 21c$.
133. $15ax + 20bc - 6ac = 6ax + 11bc + 3ac$.

---

134. $3x = 48 - (9x - 36)$.
135. $5x + 20 = 7x - (3x - 23)$.
136. $7x - 35 = 4x + (2x - 28)$.
137. $6x - (4x - 10) = 9x - (x + 8)$.
138. $20x - (31x + 16) = 12x + (17x - 24)$.
139. $54 - (36x + 21) = 41x - (57 + 32x)$.
140. $x - (8 + 4x) + 20 = 5x + (3x + 4) - (2x + 10)$.
141. $(5x - 8) - (9x + 11) = (11x - 9) - (3x - 8)$.
142. $46 - (14x - 3) - (7x - 4) = 56 + (2x - 6) - (20x + 6)$.
143. $11 - (38x + 24) = 12 - 50x - (28 - 15x)$.

144. $(9x + 5) - (6x - 7) + (3x - 8) - (2x + 16) = 0.$

145. $15x - (8x + 11) + (7x - 16) - (3x + 22) + 16 = 0.$

146. $50x - (20x - 25) + (84 - 12x) + 1 = 44x - (95 - 15x).$

147. $95 + (88x + 67) - (39x - 23 + 15x) - (92 + 25x + 52) = 0.$

148. $7x - [12 + (3x - 5) - 4x] = 2x + 1.$

149. $13 + [5x - (7x + 9) + 12x] - 15 = 9.$

150. $45x - [35 - (17x + 22)] = 34 - (34x - 1).$

151. $12x + [20 - (16 - 2x) - 15] = 36 - (78 - 7x) + 59.$

152. $105x - [(66 + 39x) - (-55x - 46)] = 210 + (-49x + 20).$

153. $211x - [150x - (205 - 45x)] + (75x - 150) + 218 = 0.$

154. $10x - (12 - 6x) - [80 - (21x + 16) - 60]$
$= [3x + (24x - 52) - (18x - 50)].$

155. $35 - [x - (8x + 42) - 12x] = x + (9x - 7) - [10x - (13x + 138)].$

156. $5x - \{4 + [-3x + (6 - x) - 8] + 3x\} = 4.$

157. $24x + \{33 - (13 + 10x) + [25 - (15x + 12) - 11]\} - 41 = 0.$

158. $36 - \{5x - [20 + 3x - (4x + 12) + 2] - 21\} + 25$
$= 2x - \{10 + [6x - (3 + 2x) + 8] - 3\}.$

159. $54x - (20 + 6x) - [32 - (21x - 35)] = 46x$
$- \{23 - [15x + (36x - 3)] - 48\} + 3.$

160. $25x - 10 - \{6x - [21 + 4x + (12 + 6x) + 15] - 28\} = 3$
$- (5x + 2) - \{10 - [25 + 12x - (6x - 3) + 2] - 1\} - 12.$

161. $6{,}5x = 19{,}12 - (2{,}5x + 1{,}12).$

162. $12{,}30x - (2{,}80x - 7{,}60) = 15{,}20x - (2{,}36x - 91{,}10).$

163. $8{,}8x - (3{,}75x - 3) - (1{,}22x + 11{,}96) + 35{,}77 = 0.$

164. $10{,}2x - [9x - (3{,}1x + 5{,}2) - 7{,}4] = 6{,}2 - [3{,}5x + (4x - 41{,}8)]$

165. $51{,}84 - [13{,}5x + (12{,}21 - 26{,}3x) - 42x] = 46{,}5x$
$+ [22{,}15x + (1{,}36x + 24{,}42)].$

166. $10{,}1x + \{21{,}5 - [3{,}2x + 13{,}7 + (40{,}2x + 81{,}1)] - 13 - (21 + 5{,}2x)\} = 8{,}2$

167. $2{,}4x - \{3{,}1x + 6{,}26 - [8{,}2x - 31 - (11 + 5{,}1x)] - 12x\}$
$= 13x - [5{,}1x + (20{,}6 - 21{,}4x) - 5x] + 12{,}14.$

168. $48x - [22\tfrac{1}{2} - (8\tfrac{3}{4} - 5\tfrac{1}{2}x)] + (12\tfrac{1}{2}x - 7\tfrac{3}{4}) - 6 = 0.$

169. $40\tfrac{2}{3}x - [23\tfrac{1}{2}x + (14\tfrac{1}{4}x - 20\tfrac{1}{3}) - 12\tfrac{1}{4}x] = 5\tfrac{2}{3}x$
$- (11\tfrac{1}{2} - 2\tfrac{1}{2}x) + [5\tfrac{1}{6}x - (2\tfrac{2}{3} - 13\tfrac{1}{3}x)].$

170. $6abx - (5cd + bf) + (3abx - 11cd) = 8cd - (4abx + 3ab)$

171. $15acx - (3cde - 6acx) - (12cde - 9acx) - 15cde = 0,$

172. $5abc - (2abx + 3abc) - (6abc - 4abx) + 8abx = 0.$

173. $4x - (3ab - 5bc) + [6x - (18bc + 5ab) - 3x] = 5bc$
$- [8ab + (-9x - 4bc) - 2x].$

---

174. $12(2x - 1) = 156.$

175. $20(x + 1) - 8(7 + x) = 0.$

176. $13(5 + 6x) = 15(3x - 1) + 245.$

177. $7(5x - 19) = 6(3x - 8).$

178. $3(20 - x) + 5(x - 6) - 2(17 - x) = -16.$

179. $28x - (265 + 341x) + 12(-21 - 13x) = -(7 - 211x).$

180. $16(x - 2) + 6(x + 3) = 5(9 - 2x) - x + (32x - 39).$

181. $23(2x - 3) - 2[10(5x - 6) + 40] = -3[5x + 2 - 4(x + 10)]$
$- (37x + 45).$

182. $40 - [8(8 + 3x) + 5x] = 6(3 + 13x) + 2[5(20 - 7x) - (87x + 3)]$
$- (57x + 42).$

183. $8\left\{2[3(3x - 1)]\right\} - (84x - 18) = 0.$

184. $3\left\{3[3(3x - 3) - 3] + 3\right\} - 3 = 60.$

185. $4(3{,}5x - 2{,}4) = 46{,}4.$

186. $3{,}2(2{,}1x + 4{,}2) - 4{,}5(1{,}3 + 2{,}2x) = -1{,}95.$

187. $1{,}5(8{,}2 + 3{,}5x) + 3{,}2(0{,}12x - 0{,}1) - 1{,}5(6{,}5x - 3{,}1) = -53{,}342.$

188. $2{,}8(4{,}3x - 2{,}6) - 0{,}9(3{,}5 + 6{,}2x) - 10{,}35x + 18{,}21 = 0.$

189. $4{,}8 + 12(0{,}3x + 0{,}2) + 2{,}6x = 1{,}6(15x - 2) - 3{,}5x$
$- 0{,}4(0{,}5x - 18) - (6{,}2x + 4{,}7).$

190. $9(1{,}3x + 0{,}7) - 0{,}5[2(4{,}2x - 3{,}4) + 8{,}4] + 3(4{,}5 + 2{,}5x)$
$= 2[5(15{,}96x - 4{,}4) - (3{,}2x + 0{,}8)] - 10(0{,}3x + 0{,}3).$

191. $\frac{2}{3}(5x - 4) + \frac{3}{2}(x + 3) = 2\frac{1}{2}(x - 1) + \frac{1}{2}(7x - 3).$

192. $\frac{1}{4}(5\frac{1}{2}x + 9) - \frac{2}{3}(3\frac{1}{4}x + 2\frac{1}{2}) = \frac{1}{12}[2x - 4(\frac{3}{4}x + 0{,}5)] + \frac{1}{24}.$

193. $\frac{3}{4}(3x + 1) - 2[4\frac{1}{10}x - 3(\frac{3}{4}x + \frac{1}{4})]$
$= \frac{4}{5}\left\{13x - [5x - (3x - 1) - 20x] - 2\frac{3}{4}\right\}$

194. $2a(x + 5b) - 3c(4x - 6a) = 12b(a + 2x)$

195. $5p(3x + 2q) - 3q(2p - 5x - 4) = 4q(2x - 7p) + 33pq.$

196. $3u(20 - 6v) + 8[(9x + 3u) - 2v] = 6[15x - (3u + 5v)].$

---

197. $(x + 3)(x - 13) = (x - 12)(x - 3).$

198. $(x - 7)(x + 3) = (x - 2)(x - 11).$

199. $(x - 6)(x - 3) = (x - 9)(x + 3)$.
200. $(x + 3)(x - 4) = (x - 6)(x - 5) + 8$
201. $(x + 9)(x + 8) = (x + 30)(x - 1) - 18$.
202. $(x - 4)(x + 4) = (x - 2)(x + 6) - 40$.
203. $(3x + 4)(6x - 7) - 53 = 6(3x - 1)(x - 3)$.
204. $48(x + 2)(x - 1) = 8(3x + 34)(2x - 5) - 240$.
205. $2(10 + x)(7x - 8) + 301 = (2x + 15)(11 + 7x)$.
206. $6x(3x - 4) + 5(x - 1)(7x + 9) - (3 + 11x)(15 - 2x)$
$= (3x - 2)(x + 2)25 + 556$.
207. $(1{,}6x + 0{,}8)(3x - 1) = (1{,}2x + 7{,}6)(2x - 3)2$.
208. $(0{,}6x - 0{,}4)(x + 1)1{,}6 = (1{,}2x - 0{,}9)(x + 1)0{,}8$.
209. $(a + b)(c + x) - (b - a)(x - c) = 0$.
210. $(a + x)(b - x) = (a - x)(b + x) + c$.
211. $(b + cx)(bx + c) = -(b - cx)(bx - c)$.
212. $(b - c)(a - x) + (a - b)(c + x) - (b - a)(c - x) + 2bc$
$- cx = 0$.
213. $(a + b - x)(u - v) - (a - x)(u + v) = b(u - v)$.

---

214. $(x + 2)^2 - (x - 5)^2 = 105$.
215. $(x + 7)^2 = (x + 10)^2 - 11(x + 1)$.
216. $(x + 5)^2 - (x + 4)^2 = (x + 2)^2 - (x - 2)^2 + 6$.
217. $(x + 1)^2 - (x - 2)^2 = (x + 2)^2 - (x - 3)^2 - 6(x - 6) - 4$.
218. $(x + 3)^2 + (x + 2)^2 + 35 = (x + 5)^2 + (x + 1)^2 + 3(x + 4)$
219. $(7 + 3x)^2 + (4x - 5)^2 = (5x + 13)^2 - 10(x + 19) - 23$.
220. $(19x + 25)^2 - (18x + 23)^2 = 37(x + 40)^2 + 494$.
221. $(5x - 3)^2 - (3x + 6)^2 = (4x + 7)^2 - 5(4x + 11) - 113$.
222. $(8x - 3)(8x + 3) = (10x + 7)^2 - (6x - 19)^2 - 65$.
223. $(x + 5)^2 + (x + 7)^2 = (x + 1)^2 + (x + 3)^2 + 4(x + 13)$
$+ 30(x - 2)$.
224. $(5x + 12)(5x - 12) + 3248 = (3x + 17)^2 - 205 + (20 + 4x)^2$.
225. $(2{,}5x + 1{,}5)^2 - (2{,}5x + 0{,}5)^2 = 7$.
226. $(1{,}5x + 2)^2 - (2{,}4x - 4{,}6)^2 = 53{,}04 - 3{,}51x^2$
227. $(0{,}3x + 3{,}6)^2 + (0{,}4x + 3{,}8)^2 = (0{,}5x + 4)^2 + 2(x + 1{,}5) + 2$.
228. $(1{,}3x + 3{,}9)^2 - (0{,}5x + 1{,}5)^2 = (1{,}2x + 3{,}6)^2 - 2(0{,}3x - 0{,}5)$.
229. $(4x - \frac{1}{2})^2 + (3x - \frac{1}{2})^2 = (5x - \frac{1}{2})^2 - \frac{3}{2}x$.
230. $(x + a)^2 + (x - b)^2 = (x - a)^2 + (x + b)^2$.

231. $(x + m)^2 = (x - n)^2 + m(m - n)$.

232. $(x - a)(x + a) = (x - c)^2$.

233. $(x - a)^2 + (x + b)^2 - a(1 - b) = x(x - 2a) + (3b + x)x + a^2 + b^2$.

234. $(x + c)^2 - (x - u)^2 = (x + c)(x - c) - x(x - c) + 2c^2$.

235. $(4ax + 3b)^2 - 23b^2 = (5ax - 2b)^2 - (3ax - 2b)^2$.

236. $(6ax + 4b)^2 + (8ax - 7b)^2 = (10ax + 9b)^2$.

---

237. $\frac{x}{8} = 12$ 238. $\frac{x}{5} = 3$. 239. $\frac{3x}{7} = 2$.

240. $\frac{8x}{5} = 40$ 241. $\frac{9}{x} = 3$. 242. $\frac{11}{x} = 7$.

243. $\frac{6}{5x} = 2$. 244. $\frac{14}{3x} = 7$. 245. $\frac{0,4}{x} = 2$.

246. $\frac{1,3}{x} = 3,9$. 247. $\frac{2,5}{x} = 12,5$ 248. $\frac{9}{x} = 7,2$.

249. $\frac{40}{x} = 0,8$. 250. $\frac{x}{1,2} = 7$. 251. $\frac{3,75}{x} = 0,75$.

252. $\frac{5,4}{x} = 1,8$. 253. $\frac{x}{c} = b$. 254. $\frac{bx}{c} = a$.

255. $c = \frac{ab}{x}$. 256. $\frac{c}{ax} = b$.

---

257. $\frac{x}{2} + 5 = 8$. 258. $\frac{x}{9} + 7 = 11$.

259. $\frac{x}{3} - 2 = 13$ 260. $\frac{4}{x} + 5 = 7$.

261. $\frac{13}{x} - 4 = 35$. 262. $6 + \frac{3}{x} = 33$.

263. $\frac{x}{1,5} - \frac{2}{3} = 6$. 264. $\frac{10}{x} + 3,6 = 7,6$.

265. $\frac{x + 3}{4} = 6$. 266. $\frac{x - 8}{2} = 13$.

267. $\frac{9 - x}{4} = 11$. 268. $\frac{x + 1,1}{2,3} = 2$

269. $\frac{x + 2,4}{3} = 2,2$ 270. $\frac{x}{a} + b = c$.

271. $c + \frac{x}{b} = a$. 272. $\frac{x}{c} - d = c$.

273. $\frac{a}{x} - b = c - d$ 274. $\frac{b}{x} - a = c + d$.

275. $\frac{x + a}{b} = c$. 276. $\frac{x - c}{b} = a$.

---

277. $\frac{6}{x+2} = 2.$

278. $\frac{15}{x-3} = 5.$

279. $\frac{5}{x-2} = 3.$

280. $\frac{100}{x+1} = 25$

281. $\frac{120}{3x-2} = 12.$

282. $53 - \frac{315}{x+6} = 32.$

283. $\frac{144}{9(x-1)} = 4.$

284. $\frac{3(x+1)}{5x-3} = 3.$

285. $\frac{3(3x+5)}{4x-5} = 4.$

286. $\frac{5(x-3)}{x+3} = 2$

287. $\frac{5}{x-0{,}6} = 2{,}5.$

288. $\frac{4{,}5}{1{,}3x-1{,}65} = 2.$

289. $\frac{a}{x+b} = c.$

290. $\frac{a}{x-c} = b.$

291. $\frac{a}{x+3} = 4b.$

292. $\frac{x+a}{x-b} = 5.$

293. $\frac{x-a}{x+a} = b.$

---

294. $\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x = 10.$

295. $\frac{x}{4} + \frac{x}{5} = 9.$

296. $2x - \frac{x}{6} + \frac{x}{8} - \frac{x}{12} = 2 - \frac{x}{8}.$

297. $\frac{x}{3} + \frac{x}{4} - x + \frac{x}{9} = 1 + \frac{x}{36}.$

298. $3x - \frac{2}{5}x + 10 = 50 + \frac{5}{6}x - \frac{x}{3} + 2.$

299. $\frac{5x}{2} - 3 = \frac{x}{4} + 2(3x-4) - 2\frac{1}{2}.$

300. $\frac{x+1}{3} + \frac{x+3}{12} = 1.$

301. $\frac{x+3}{3} + \frac{x+10}{9} = 3.$

302. $\frac{x+5}{7} - \frac{x-15}{5} = 8.$

303. $\frac{3x+2}{5} - \frac{2x+3}{8} - \frac{1}{40} = 3\frac{1}{2}$

304. $\frac{5x+3}{9} = 10 - \frac{4x-1}{2}.$

305. $\frac{8x+5}{3} + \frac{65}{11} = \frac{7x-6}{11}.$

306. $\frac{x+3}{2} - \frac{x+1}{3} = 3(2x+5) + 22.$

307. $\frac{2}{3}(x+4) - \frac{1}{2}(x+5) = 1$

308. $\frac{3}{4}(x+5) - \frac{4}{5}(3x+4) = -11.$

309. $\frac{x-5}{4} + \frac{x+8}{5} = \frac{x+7}{4}$.

310. $\frac{x+11}{2} - \frac{11}{21} = \frac{x-15}{3} + \frac{30-x}{7} + 6$.

311. $\frac{4(8x+1)}{9} + \frac{9+x}{2} = \frac{11}{13}(14x-1) - 2(6x-5)$.

312. $\frac{4(2x+5)}{5} - \frac{x+35}{9} = 6(3x-28) + \frac{x-1}{3}$.

313. $3x + 2 + \frac{3(5x-7)}{4} = \frac{10(x+3)}{3} - \frac{3(3x-1)}{8}$.

314. $\frac{4(3x+7)}{11} - \frac{5x-13}{4} = \frac{2(4x-9)}{11} + \frac{7x+1}{12}$.

315. $\frac{x+3}{1{,}1} + \frac{5x-3{,}9}{2{,}2} = 8$.

316. $\frac{3x+23{,}04}{3{,}3} - \frac{2x+1{,}5}{1{,}1} = 2(x-0{,}1)$.

317. $\frac{x}{4{,}2} + \frac{x}{6{,}3} = 25$.

318. $0{,}4x - \frac{x}{0{,}2} + 37 = 3{,}5x + \frac{8{,}7x}{5} - 6{,}14x$.

319. $\frac{x+1{,}5}{3} + \frac{1{,}9(2x-3)}{5} = 1{,}3x - 0{,}77$.

320. $\frac{x}{a} + \frac{x}{b} = c$.

321. $\frac{x}{c} - \frac{x}{d} = a$.

322. $\frac{x}{a} - 1 = \frac{x}{b} - \frac{x}{c}$.

323. $\frac{ax}{c} + \frac{bx}{d} = e$.

324. $b + \frac{c}{b}(x-c) = \frac{bx}{c}$.

325. $\frac{a+x}{a} + \frac{b-x}{b} = c + 2$.

326. $\frac{x-a}{a} + \frac{x-b}{b} = 3$.

327. $\frac{3}{4}(x-2a) + \frac{1}{2}(x+3b) = 1\frac{1}{2}(b-a) + 5a$.

328. $\frac{b(x+a)}{a} - \frac{a(x-b)}{b} = x + \frac{bx}{a}$.

329. $\frac{a(x-b)}{b} - \frac{b(a-x)}{a} = \frac{a(1-b)}{b}$.

---

330. $\frac{2(3x-5)}{3x+4} = \frac{1}{5}$.

331. $\frac{5(5x+2)}{3(15x+7)} = \frac{1}{2}$.

332. $\frac{2(4x-15)}{7x+20} = \frac{5}{9}$.

333. $\frac{7}{8} = \frac{13x-3}{8(2x-1)}$.

334. $\frac{6(3x+4)}{13x-6} = \frac{11}{6}$.

335. $\frac{5(x+1)}{4(6x-7)} = \frac{2}{7}$.

336. $\frac{3(19x-3)}{4(11x+4)} = \frac{4}{5}$.

337. $\frac{3x^2+7x-1}{5x^2+8x+2} = \frac{3}{5}$.

338. $\frac{4x^2+3x-10}{6x^2-5x+4} = \frac{2}{3}$.

339. $\frac{x(3x-4)}{4x^2-x-13} = \frac{3}{4}$.

340. $\frac{8x^2-21x-15}{3(2x^2-11x+25)} = \frac{4}{3}$.

341. $\frac{1,5x+2}{3,5x-2} = \frac{1}{2}$.

342. $\frac{0,25x+4,2}{3,50x+2,6} = \frac{1}{3}$.

343.* $\frac{x+3}{x-3} = \frac{5}{2}$.

344. $\frac{x+9}{x-9} = \frac{11}{2}$.

345. $\frac{x-5}{x+5} = \frac{1}{3}$.

346. $\frac{2x+1}{2x-1} = 1\frac{2}{3}$.

347. $\frac{x+0,5}{x-0,5} = 2$.

348. $\frac{x-\frac{1}{3}}{x+\frac{1}{3}} = \frac{5}{7}$.

349. $\frac{1-x}{1+x} = \frac{1}{a}$.

350. $\frac{x-a}{x-b} = \frac{a}{b}$.

351. $\frac{ab-x}{bc-x} = \frac{b}{c}$.

352. $\frac{a(x+b)}{ax-c} = \frac{3c}{b}$.

353. $\frac{m^2-n^2}{mx+n} = \frac{m-n}{x}$.

354. $\frac{a+x-b}{x+b-a} = \frac{a}{b}$.

---

355. $\frac{1}{7x+1} = \frac{2}{11x+8}$.

356. $\frac{1}{x-1} = \frac{4}{3x+5}$.

357. $\frac{25}{2x+15} = \frac{17}{2x-9}$.

358. $\frac{41}{5x-29} = \frac{26}{3x-16}$.

359. $\frac{17}{7x-4} = \frac{31}{11x-2}$.

360. $\frac{85}{4x+17} = \frac{47}{3x-4}$.

361. $\frac{35}{6x+11} = \frac{16}{7x-12}$.

362. $\frac{58}{7x-26} = \frac{61}{6x-11}$.

363. $\frac{1}{0,5(11x-3)} = \frac{3}{0,2(41x+19)}$.

364. $\frac{1}{0,6(5x+4)} = \frac{1}{4x-1,8}$.

365. $\frac{x+11,5}{x-3,5} = \frac{x+16,5}{x-1,5}$.

366. $\frac{34}{7x-1} - \frac{26}{5x+1} = 0$.

367. $\frac{2}{x+2} - \frac{1}{x+6} = \frac{1}{x}$.

368. $\frac{6}{x+12} + \frac{1}{x-9} = \frac{7}{x}$.

369. $\frac{2x+3}{4x-1} = \frac{3x+2}{6x+1}$.

370. $\frac{8x+1}{4x-3} = \frac{4x+5}{2x-7}$.

371. $\frac{x+a}{x-b} = \frac{x-b}{x-a}$.

372. $\frac{x+a}{a-b} = \frac{x+b}{a+b}$.

373.*) $\frac{x-b}{x+b} = \frac{a-c}{a+c}$.

374. $\frac{a+x}{a-x} = \frac{b+c}{b-c}$.

---

*) Die Gleichungen Nr. 343 bis 349 und Nr. 373 bis 375 sind mit Hilfe des Satzes von der korrespondierenden Addition und Subtraktion zu lösen. Vgl. § 26. Nr. 151 u. 152.

375. $\frac{x+b}{x-b} = \frac{a+b}{a-b}$.

376. $\frac{x}{m-n} = \frac{m^2-n^2}{m+n}$.

377. $\frac{6x+a-3b}{4x+4b+3a} = \frac{3x-3b+4a}{2x+4b+5a}$.

378. $\frac{17}{6x(x-2)} = \frac{3}{2(x-2)} - \frac{5}{3x}$.

379. $\frac{4}{3x-1} = \frac{7}{2x(3x-1)} + \frac{1}{4x}$.

---

380. $\frac{3x+22}{3x+1} - \frac{2x+11}{3x-1} = \frac{3x^2+5(x+2)+3}{9x^2-1}$.

381. $\frac{7x+6}{2x+3} + \frac{5x-3}{2x-3} = \frac{8x(3x-1)}{4x^2-9}$.

382. $\frac{3(9x+4)}{5x+4} - \frac{19x-12}{5x-4} = \frac{(8x-2)(5x-3)-126}{25x^2-16}$.

383. $\frac{5x+1}{7-4x} + \frac{(25-22x)(12+10x)}{49-16x^2} = \frac{50x-6}{7+4x}$.

384. $\frac{3x-11}{x+3} - \frac{x-5}{x-3} = \frac{(x-2)(2x-9)}{x^2-9}$.

385. $\frac{10x+7}{3x+4} - \frac{7x-5}{2x+5} = \frac{110+40x-x^2}{6x^2+23x+20}$.

386. $\frac{7x+11}{2x+1} - \frac{8x+1}{3x-2} = \frac{5x^2+7x+5}{6x^2-x-2}$.

387. $\frac{x+5}{2x-1} + \frac{111+(x-2)(2x-15)}{4x^2-8x+3} = \frac{2(x+3)}{2x-3}$.

388. $\frac{1}{x+5} + \frac{1}{x-3} = \frac{2}{x-1}$.

389. $\frac{8}{x-1} + \frac{6}{x+4} = \frac{2}{x-1}$.

390. $\frac{5}{x+7} = \frac{3}{x+10} + \frac{2}{x+5}$.

391. $\frac{5a}{3a-x} + \frac{3}{2x} = \frac{a(5x+3)}{x(3a-x)}$.

392. $\frac{3x+4b}{x+2b} - \frac{2}{3x} = \frac{3x^2+4bx-2b}{x(x+2b)}$.

393. $\frac{4x+3a}{x+2a} = \frac{8a(a+x)-x^2}{(x+2a)2a} + \frac{x}{2a}$.

394. $\frac{a-b}{x+a} - \frac{a+b}{x-a} = -\frac{2(a^2+ab+b^2)}{x^2-a^2}$.

395. $\frac{a+x}{b+x} + \frac{c+x}{b-x} = \frac{x(c-a)}{b^2-x^2}$.

396. $\frac{b+3a}{2a+x} - \frac{a-3b}{2a-x} = \frac{12a^2}{4a^2-x^2}$.

XI. Anwendungen der Gleichungen ersten Grades mit einer Unbekannten.

§ 28.

A. Gleichungen einfachster Art.

1. Zu welcher Zahl muß man 48 addieren, um 119 zu erhalten?

2. Addiert man zu einer gewissen Zahl 287, so erhält man 436. Wie heißt die Zahl?

3. Addiere ich eine gewisse Zahl zu b, so erhalte ich c. Wie heißt die Zahl?

4. Welche Zahl muß man zu 384 addieren, um 837 zu erhalten?

5. Von welcher Zahl muß man 235 abziehen, um 126 zu erhalten?

6. Wie heißt die Zahl, die, um 357 vermindert, 566 ergibt?

7. Welche Zahl muß man von 354 subtrahieren, um 186 zu erhalten?

8. Wie heißt die Zahl, die, um b vermehrt, 0 ergibt?

9. Welche Zahl gibt mit m multipliziert a?

10. Welche Zahl muß man mit 24 multiplizieren, um 408 zu erhalten?

11. Wie heißt die Zahl, die, mit 18 multipliziert, 918 ergibt?

12. Wie heißt die Zahl, die, mit 5 multipliziert, 30bc ergibt?

13. Von welcher Zahl entsteht das 5fache, wenn man zu ihrem 3fachen 24 addiert?

14. Von welcher Zahl ist das 9fache um 18 größer als ihr 6faches?

15. Das 3fache und das 4fache einer Zahl geben zusammen 105. Wie heißt die Zahl?

16. Das Doppelte und das 5fache einer Zahl geben zusammen 84. Welche Zahl ist es?

17. Das 4fache und das 5fache einer Zahl betragen zusammen 144. Welches ist die Zahl?

18. Welche Zahl gibt, um ihr 4faches und 7faches vermehrt, 156?

19. Addiert man zum cfachen einer Zahl bd, so erhält man 4bd. Wie heißt die Zahl?

20. Addiert man zu einer Zahl 5, so erhält man dasselbe, wie wenn man sie mit 5 multipliziert. Wie heißt die Zahl?

21. Von zwei Zahlen ist die eine 3mal so groß wie die andere. Wie groß ist jede, wenn ihre Summe 64 beträgt?

22. Die Zahl 119 ist in 2 Teile zu teilen, von denen der eine Teil 6mal so groß ist wie der andere. Wie groß sind die Teile?

23. Wenn man vom 15fachen einer Zahl 48 subtrahiert, so erhält man ebensoviel, wie wenn man ihr 3faches um 36 vermehrt. Wie heißt die Zahl?

24. Vermehrt man das 14fache einer Zahl um 34, so erhält man dasselbe, wie wenn man ihr 100faches um 9 vermindert. Wie heißt die Zahl?

25. Multipliziert man das um 3 verminderte 7fache einer Zahl mit 4, so erhält man ebensoviel, wie wenn man das um 8 vermehrte 3fache derselben mit 5 multipliziert. Wie heißt die Zahl?

26. Wenn man von 200 eine gewisse Zahl subtrahiert, so erhält man dasselbe, wie wenn man ihr 5faches um 20 vermehrt. Wie heißt die Zahl?

27. Multipliziert man das um 2 vermehrte 6fache einer Zahl mit 7, so erhält man ebensoviel, wie wenn man das um 9 verminderte 13fache derselben mit 4 multipliziert. Wie heißt die Zahl?

28. Die Summe zweier Zahlen beträgt 68, ihre Differenz 22. Welches sind die Zahlen?

29. Zwei Zahlen haben die Differenz 321 und die Summe 843. Wie heißen die Zahlen?

30. Die Summe dreier Zahlen beträgt 120. Die zweite Zahl ist um 9 größer als die erste und die dritte um 3 größer als die zweite. Welches sind die Zahlen?

31. Zwei Mädchen verteilen 18 Walnüsse so unter sich, daß das ältere 4 Nüsse mehr erhält als das zweite. Wieviel bekommt jedes?

32. Wäre der Inselsberg 226 m höher als er ist, so hätte er die Höhe des Brockens, die 1141 m beträgt. Wie hoch ist der Inselsberg?

33. Es sollen 2100 ℳ unter A und B so verteilt werden, daß A 240 ℳ mehr erhält als B. Wieviel bekommt jeder von ihnen?

34. In einer Versammlung von 275 Personen waren viermal so viel Herren wie Damen. Wieviel Herren waren anwesend?

35. A und B besitzen zusammen 276000 ℳ. A ist dreimal so vermögend wie B. Wieviel besitzt jeder?

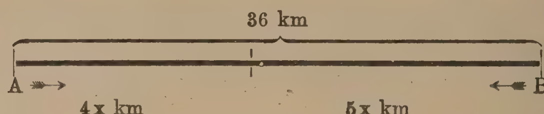
36. Die Fahrstrecke Berlin—Hamburg beträgt 286 km. Die Hauptstelle der auf dieser Linie verkehrenden D-Züge ist Wittenberge, 127 km hinter Berlin. Wie weit ist es von Wittenberge bis Hamburg? (Zeichnung!)

37. Wieviel km macht ein Radfahrer, der in 6 Stunden 100 km zurücklegt, durchschnittlich in der Stunde?

38. Zwei Frauen lassen sich zusammen für 28,80 ℳ Kaffee kommen. Frau A nimmt 4 kg, Frau B 5 kg. Wieviel hat jede zu bezahlen?

39. In wieviel Tagen wird ein Graben von 4180 m Länge hergestellt werden, wenn durchschnittlich von dem einen Ende aus täglich 150 m, von dem andern 230 m aufgeworfen werden?

40. Aus zwei Orten, die 36 km voneinander entfernt sind, brechen zwei Freunde gleichzeitig auf und gehen sich entgegen. A legt 4 km in der-



selben Zeit zurück, in der B 5 km zurücklegt. Nach wieviel Stunden treffen sie sich, und wieviel km hat jeder zurückgelegt?

41. Zwei Eisenbahnzüge fahren sich von zwei Orten A und B, die 495 km voneinander entfernt sind, entgegen. Der eine Zug legt 50 km, der andere 40 km stündlich zurück. Nach wieviel Stunden begegnen sie sich?

42. Die Flußlängen von Donau und Rhein betragen zusammen 4220 km. Wie lang ist jeder der Flüsse, wenn die Donau 1580 km länger ist als der Rhein?

43. Die Provinzen Brandenburg, Westpreußen, Ostpreußen und Schlesien haben zusammen einen Flächeninhalt von 142647 qkm. Westpreußen ist 25516 qkm, Ostpreußen 36987 qkm, Schlesien 40307 qkm groß. Wie groß ist Brandenburg?

44. Verbraucht jemand täglich 7 ℳ, so reicht sein Reisegeld 12 Tage. Wie lange könnte seine Reise dauern, wenn er nur 6 ℳ täglich ausgeben würde?

45. Ich hatte 4 ℳ bei mir, kaufte Obst und behielt noch viermal soviel Geld übrig, wie ich dafür bezahlt hatte. Wieviel hatte ich ausgegeben?

46. Eine Mutter ist jetzt 44 Jahre, ihre Tochter 12 Jahre alt. Nach wieviel Jahren wird die Mutter dreimal so alt sein wie die Tochter?

47. A ist jetzt 35 Jahre, B 22 Jahre alt. Vor wieviel Jahren war A doppelt so alt wie B?

48. Ein 65jähriger Vater hat einen 21jährigen Sohn. Vor wieviel Jahren war der Vater fünfmal so alt wie der Sohn?

49. Ein Sohn ist jetzt 8 Jahre, die Mutter 30 Jahre alt. Nach wieviel Jahren wird die Mutter dreimal so alt sein wie der Sohn?

50. Meine Schwester ist jetzt doppelt so alt wie ich und war vor 8 Jahren viermal so alt wie ich war Wie alt bin ich jetzt?

51. Von 63 ℳ gab ich soviel aus, daß der Rest meiner Barschaft sechsmal so groß war wie die ausgegebene Summe. Wieviel hatte ich ausgegeben?

52. Eine Röhre liefert in der Minute 21 l Wasser. In welcher Zeit wird sie einen Behälter von 672 cdm Inhalt füllen?

53. Der Hohenzollern ist 180 m höher als der Hohenstaufen und 400 m höher als der Kyffhäuser. Die Gesamthöhe der drei Berge beträgt 2000 m. Wie hoch ist jeder?

54. Unter drei Schwestern sollen b ℳ so verteilt werden, daß jede ältere a ℳ mehr erhält als die nächst jüngere. Wieviel erhält die jüngste?

55. Eine Summe von 36900 ℳ soll so unter 3 Brüder verteilt werden, daß der zweite dreimal, der dritte fünfmal so viel erhält wie der älteste. Wieviel erhält jeder?

56. „Auf meiner letzten Sommerreise", so erzählt jemand, „habe ich 950 km zurückgelegt. Davon machte ich dreimal so viel zu Fuß wie zu Wagen und fünfmal so viel mit der Eisenbahn wie zu Fuß". Wieviel km war er gegangen?

57. „Wieviel Geld hast du bei dir?" fragte ein Student den anderen. „Hätte ich 5 ℳ mehr in der Tasche als ich habe, so würde der vierte Teil meiner Barschaft 3 ℳ betragen," antwortete dieser. Wieviel Geld hatte er bei sich?

58. C und D berechnen ihr Vermögen. Es ergibt sich, daß der eine dreimal so viel besitzt wie der andere, und daß sie zusammen 300000 ℳ haben. Wie groß ist das Vermögen eines jeden?

59. A hat 5 ℳ mehr bei sich als die doppelte Summe Geldes, die B besitzt. Wie groß ist die Barschaft des letzteren, wenn A 37 ℳ bei sich hat?

60. Von einer Ware, die 36 kg wog, wurde ein Teil verkauft. Der Rest wog 6 kg mehr als der verkaufte Posten. Wieviel kg waren verkauft worden?

61. Wenn man das um 5 vermehrte Vierfache einer Zahl mit 4 multipliziert, so erhält man dasselbe, wie wenn das um 5 verminderte Dreifache derselben Zahl mit 10 multipliziert wird. Welches ist die Zahl?

62. Einem Fußgänger, der 90 m in der Minute zurücklegt, folgt 10 Minuten später ein anderer, der 100 m in der Minute geht. Wie lange wird dieser brauchen, um den ersten einzuholen?

63. Ein Radfahrer und ein Wagen fahren sich aus einer Entfernung von 140 km entgegen und treffen sich nach 4 Stunden. Wieviel km legte jeder in der Stunde zurück, wenn der Radfahrer stündlich 5 km mehr zurücklegte als der Wagen?

64. Von zwei Orten, die 75 km voneinander entfernt sind, gehen sich zwei Freunde A und B entgegen A legte stündlich 1 km mehr zurück als B und traf ihn nach 5 Stunden. Wieviel km legte B stündlich zurück?

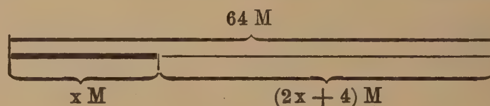
65. Einem Personenzug, der 45 km in der Stunde zurücklegt, folgt 55 Minuten später ein Schnellzug mit einer Geschwindigkeit von 70 km die Stunde. Wieviel Zeit nach Abgang des Personenzuges wird der Schnellzug jenen einholen?

66. Ein reitender Bote, A, der stündlich 12 km zurücklegt, wird einem andern, B, nachgesandt, der $\frac{1}{2}$ Stunde vor ihm aufgebrochen war. 4 Stunden nach dem Aufbruch des A wird B eingeholt. Welche Strecke legt B durchschnittlich in der Stunde zurück?

67. Bei einer täglichen Ausgabe von 8 ℳ reicht A mit seinem Reisegelde 3 Wochen. Wieviel Tage könnte er mit derselben Summe auskommen, wenn er täglich 2 ℳ weniger ausgeben würde?

68. In einer Festung ist für die Besatzung von 3000 Mann für 54 Tage Proviant vorhanden. Wie lange wird derselbe reichen, wenn die Besatzung um 600 Mann verstärkt wird?

69. Von 64 ℳ, die A bei sich hatte, gab er eine bestimmte Summe aus



und behielt noch 4 ℳ mehr als das Doppelte jener Summe übrig. Wieviel hatte er ausgegeben?

70. Es werden 10 kg Kaffee zu 4 ℳ mit 20 kg zu 2,50 ℳ gemengt. Wie teuer wird 1 kg der Mischung?

71. Die vier deutschen Königreiche umfassen eine Fläche von 460500 qkm. Preußen ist 274000 qkm größer als Bayern, welches 61000 qkm mehr umfaßt als Sachsen, während sich der Flächeninhalt Sachsens zu dem Württembergs wie 10 : 13 verhält. Wie groß ist jeder der Staaten?

72. Auf einem Dampfer kostet ein Platz in der ersten Kajüte 16 ℳ, in der zweiten 4 ℳ weniger. Es sind 14 Personen mehr in der zweiten als in der ersten Kajüte. Wieviel Passagiere hatte jede Kajüte, wenn die Einnahme aus beiden Kajüten gleich war?

73. Ein Behälter kann durch zwei Röhren gefüllt werden. Die erste liefert m Liter Wasser in der Minute, die zweite n Liter. Nach wieviel Minuten ist der Behälter, der a cdm Rauminhalt hat, gefüllt, wenn beide Röhren gleichzeitig geöffnet sind?

74. Durch die Zuflußröhre eines Wasserbehälters von 585 cdm Rauminhalt fließen in der Minute 37 l, durch die Abflußröhre 24 l. Nach welcher Zeit wird der Behälter gefüllt sein, wenn beide Röhren gleichzeitig geöffnet sind?

75. In einer Gesellschaft von 57 Personen befinden sich Männer, Frauen und Kinder. Es sind 3 Männer mehr als Frauen darunter und 3 Kinder mehr als Erwachsene. Wieviel Männer, Frauen und Kinder sind dort vorhanden?

76. In einem Stalle befinden sich Kaninchen und Hühner. Sie haben zusammen 21 Köpfe und 68 Beine. Wieviel Hühner und wieviel Kaninchen sind es?

77. Als eine Kasse am Abend gezählt wurde, fand man einen Kassenbestand von 7250,25 ℳ. Die Tageseinnahme betrug 2581,60 ℳ, die Tagesausgabe 331,35 ℳ. Wie hoch war der Kassenbestand am Morgen gewesen?

78. In einer Wahlversammlung, in der 943 Stimmen abgegeben wurden, wurde ein Kandidat mit einer Mehrheit von 167 Stimmen gewählt. Wieviel Wähler hatten für, wieviel gegen den Kandidaten gestimmt?

79. Setzten sich in einer Klasse 4 Schüler auf jede Bank, so hätten 8 keinen Platz. Setzten sich hingegen 5 Schüler auf jede Bank, so würden auf die letzte Bank nur noch 3 kommen. Wieviel Bänke sind in der Klasse und wie groß ist die Anzahl der Schüler?

80. Wäre das Straßburger Münster 34 m höher als es ist, so wäre es doppelt so hoch wie das Rathaus in Berlin; beide Gebäude zusammen sind 70 m niedriger als der Eiffelturm, dessen Höhe 300 m beträgt. Wie hoch sind sie?

81. Ein Maurer, acht Gesellen und vier Handlanger erhielten zusammen 175 ℳ Arbeitslohn. Der tägliche Lohn des Maurers betrug 5 ℳ, der eines Gesellen 3 ℳ, der eines Handlangers 1,50 ℳ. Wieviel Tage hatten sie gearbeitet?

82. 5650 ℳ sind unter vier Personen so zu verteilen, daß B 100 ℳ mehr als A, C 150 ℳ mehr als B und D 250 ℳ mehr als C erhält. Wieviel erhält A?

83. „Sechs Trinkschalen, auch schwer sechs Minen*), hat Krösos gewidmet Schwerer die folgende stets war um die Drachme jedoch**)".

84. In einer vierklassigen Schule von 112 Schülern sind in der dritten Klasse 5 Schüler weniger als in der vierten, in der zweiten 12 mehr als in der dritten, in der ersten 10 weniger als in der vierten. Wieviel Schüler sind in jeder Klasse?

85. Eine Eisenbahnfahrt dauert $6\frac{1}{4}$ Stunde, wenn der Personenzug benutzt wird, der 42 km stündlich zurücklegt. In wieviel Zeit legt der Schnellzug, der 70 km in der Stunde fährt, dieselbe Strecke zurück?

86. Die Barschaft des A betrug 3,50 ℳ mehr als die des B. Würde B dem A 5,40 ℳ von seinem Gelde geben, so würde die Barschaft des A dreimal so groß sein wie diejenige des B. Wieviel Geld hatte A?

87. Ein Kaufmann mischt a kg Kaffee zu m ℳ mit b kg einer geringeren Sorte und erzielt dadurch eine Mischung, von der das kg sich auf n ℳ stellt. Wie teuer ist 1 kg der geringeren Sorte?

88. 15 kg Tee, das kg zu 6,60 ℳ, werden mit 10 kg einer geringeren Sorte so gemischt, daß 1 kg der Mischung 6 ℳ kostet. Wie teuer war das kg der geringeren Sorte?

89. Marie hat Fünfzigpfennigstücke und Zehnpfennigstücke im Portemonnaie, im ganzen 11 Geldstücke. Wieviel jeder Art sind vorhanden, wenn die Barschaft 3,90 ℳ beträgt?

90. Auf einer Landpartie, an der Männer, Frauen und Kinder, im ganzen 45 Personen, teilnahmen, zählte man 4 Frauen mehr als Männer, während die Zahl der Kinder 5 mehr als die doppelte Anzahl der Männer betrug? Wieviel Kinder waren in der Gesellschaft?

91. Ein Weinhändler mischt 80 l zu 1,50 ℳ, 50 l zu 1,20 ℳ und 70 l zu 0,80 ℳ. Wie teuer stellt sich ein Liter der Mischung?

92. Die Zündwarensteuer beträgt 1 ₰ für eine Schachtel Zündhölzer mit weniger als 30 Stück Inhalt und $1\frac{1}{2}$ ₰ für eine Schachtel mit 30 bis 60 Stück. Frau A kauft 50 Schachteln Zündhölzer und zahlt 60 ₰ Steuer. Wieviel Schachteln jeder Art hat sie gekauft?

---

*) Minen und Drachmen sind Gewichte und Münzen der alten Griechen. 1 Mine = 100 Drachmen = 1,500 kg.

**) Diese wie auch alle folgenden Gleichungen in Form des Epigramms sind den „Arithmetischen Epigrammen der Griechischen Anthologie" (übersetzt und erklärt von Zirkel, im Programm des Gymnasiums zu Bonn 1853) entnommen. Sie sind zusammengetragen von einem griechischen Mönche im 14. Jahrhundert und werden zum größten Teile einem Zeitgenossen Konstantins des Großen, namens Metrodorus, zugeschrieben.

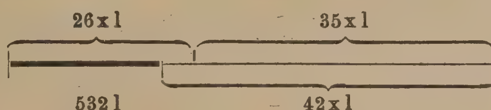
93. Unter 4 Personen ist eine Summe von 5700 *M* so zu verteilen, daß B 300 *M* mehr als den doppelten Anteil des A, C doppelt soviel wie B und D fünfmal so viel wie A bekommt. Wieviel erhält C?

94. Jemand mischt a Liter Wein zu p *M* und b Liter Wein zu q *M*. Wie teuer wird 1 Liter der Mischung?

95. 2260 *M* sollen unter 5 Personen so verteilt werden, daß B 70 *M* mehr erhält als A, C 150 *M* mehr als B, D dreimal so viel wie A und E 200 *M* weniger als B. Wieviel erhält jeder?

96. In einer dreiklassigen Schule von m Schülern sind in der zweiten Klasse a Schüler mehr als in der dritten, in der ersten b Schüler mehr als in der zweiten. Wieviel Schüler sind in der dritten?

97. Ein Behälter von 532 cdm Rauminhalt hat zwei Zuflußröhren und eine Abflußröhre. Durch die erste Röhre fließen 26 l, durch die



zweite 35 l, durch die Abflußröhre 42 l in der Minute. Nach wieviel Minuten wird der Behälter überlaufen, wenn alle drei Röhren geöffnet sind?

98. In einer Gesellschaft befanden sich anfangs zweimal so viel Herren wie Damen. Als später 6 Ehepaare weggingen, war die Anzahl der Herren dreimal so groß wie die der Damen. Wieviel Herren und wieviel Damen waren in der Gesellschaft anfänglich?

99. „Wieviel Groschen hast du bei dir?“ fragte A den B. „Rate, wieviel es sind“, antwortete dieser. „Wenn ich ihre Anzahl mit 25 multipliziere, vom Produkt 43 subtrahiere, die Differenz durch 4 dividiere und zum Quotienten 13 addiere, so erhalte ich 21“. Wieviel Geld hatte B bei sich?

100. In dem Kiu-tschang oder Neun Sektionen der Arithmetik des Chinesen Tsin Kiu Tschaou (1250 n. Chr.) finden sich die folgenden zwei Aufgaben:*)

a) „Angenommen, man hätte in einem Käfig eine Anzahl Kaninchen und Fasanen beisammen, im ganzen 35 Köpfe und 94 Füße. Wieviel von jeder Art waren vorhanden?“

*) Aus Biernatzki: „Die Arithmetik der Chinesen“ im „Journal für reine und angewandte Mathematik“. Herausgegeben von Crelle. Bd. 52.

b) „Eine Anzahl Leute kaufte eine Anzahl Waren: hätte jeder 8 Kasch*) entrichtet, so wären es 3 Kasch zuviel gewesen; dagegen: hätte jeder 7 Kasch entrichtet, so würden es 4 Kasch zu wenig gewesen sein. Wieviel Leute waren da?"

---

§ 29.

B. Gleichungen nach Sachgebieten geordnet.

a) Zahlbestimmungen.

1. Wie heißt die Zahl, die durch 4 dividiert, 585 ergibt?
2. Welche Zahl ergibt 43, wenn sie durch 32 dividiert wird?
3. Von welcher Zahl ist b der n-te Teil.
4. Dividiert man das 5fache einer Zahl durch 7, so erhält man 35. Wie heißt die Zahl?
5. Nimmt man den 9. Teil einer Zahl und vervielfältigt ihn mit 8, so erhält man 24. Wie heißt die Zahl?
6. $\frac{8}{17}$ einer Zahl betragen 56. Wie heißt dieselbe?
7. $\frac{9}{10}$ einer Zahl betragen $22\frac{1}{2}$. Wie heißt dieselbe?
8. $\frac{3}{49}$ einer Zahl betragen $3\frac{3}{7}$. Wie groß ist dieselbe?
9. Von welcher Zahl ist der 8. Teil um 30 kleiner als der 5. Teil?
10. Von welcher Zahl ist das 6fache um 120 kleiner als ihr 8faches?
11. Der 3. und der 7. Teil einer Zahl betragen zusammen 20. Wie heißt die Zahl?
12. Welche Zahl gibt mit $\frac{4}{5}$ multipliziert 2 weniger, als wenn man sie mit $\frac{6}{7}$ multipliziert?
13. Dividiert man eine gewisse Zahl durch 5 und addiert zum Quotienten 13, so erhält man 24. Welches ist die Zahl?
14. Durch welche Zahl muß man 484 teilen, wenn der um 75 vermehrte Quotient 196 beträgt?
15. Welche Zahl gibt um 85 vermindert ebensoviel wie durch 16 dividiert?
16. Durch welche Zahl muß $(m^2 - n^2)$ geteilt werden, damit sich $(m + n)$ ergibt?
17. Vermehrt man eine gewisse Zahl um 12 und teilt die Summe durch 7, so erhält man 6. Wie heißt die Zahl?
18. Um welche Zahl muß man 80 vermindern, damit die durch 4 dividierte Differenz 16 ergibt?

---

*) Kasch oder Li ist eine chinesische Landesmünze. Etwa 1500 Kasch = 1 Tael = 6 ℳ. Die Münzen sind durchlöchert und werden oft zu 100 oder 1000 Stück auf Schnüre aufgereiht.

19. Die Differenz zweier Zahlen, von denen die eine das 3fache der anderen beträgt, ist = m. Wie heißt die kleinere Zahl?

20. Subtrahiert man von einer gewissen Zahl 4 und dividiert die Differenz durch 3, so erhält man 19. Wie heißt die Zahl?

21. Der 5. Teil einer um 6 verminderten Zahl beträgt 23. Welches ist die Zahl?

22. In der Coß*) von Adam Riese (Marienberger Manuskript) steht folgende Aufgabe:**)
„Item teyl mir 16 in Zwey teyl, so ich $\frac{1}{3}$ vom größern teyl nim und zum kleinern teyl addir, das 8 komen".

23. Dividiere ich 72 durch das um 6 vermehrte 5fache einer gewissen Zahl, so erhalte ich 2. Wie heißt die Zahl?

24. Dividiert man 800 durch das um 6 verminderte 2fache einer gewissen Zahl, so erhält man 32. Wie groß ist die Zahl?

25. Der 3. Teil einer Zahl vermehrt um den 8. Teil derselben ergibt 33. Wie heißt dieselbe?

26. Subtrahiert man vom 4. Teil einer Zahl den 5. Teil derselben Zahl, so erhält man 7. Wie heißt die Zahl?

27. Addiere ich zu dem 3fachen einer gewissen Zahl 11 und teile die Summe durch 8, so erhalte ich ebenso viel, wie wenn ich das 5fache der Zahl um 2 vermehre und die dadurch erhaltene Summe durch 11 dividiere. Welches ist die Zahl?

28. Multipliziere ich das um 6 vermehrte 13fache einer gewissen Zahl mit 4 und teile das Produkt durch 3, so erhalte ich dasselbe, wie wenn ich das 26fache der Zahl um 1 vermindere, die Differenz mit $\frac{5}{7}$ multipliziere und zu dem Quotienten 5 addiere. Wie heißt die Zahl?

29. Addiert man zum Zähler des Bruches $\frac{a}{b}$ eine gewisse Zahl und subtrahiert dieselbe Zahl vom Nenner, so entsteht der Bruch $\frac{p}{q}$. Wie groß ist die Zahl?

30. Welche Zahl muß man zum Zähler und Nenner des Bruches $\frac{8}{11}$ addieren, damit sein Wert = $\frac{4}{5}$ wird?

31. Um welche Zahl muß ich Zähler und Nenner des Bruches $\frac{32}{41}$ vermindern, damit er den Wert $\frac{3}{4}$ bekommt?

---

*) Coß vom ital. cosa = unbekannte Größe. Regola della cosa frühere Bezeichnung der Algebra.

**) Adam Riese († 1559), Bergbeamter und Rechenmeister zu Annaberg in Sachsen, war der Verfasser der ersten methodischen Anweisungen zur praktischen Rechenkunst in Deutschland.

32. Ein Bruch, dessen Nenner um 5 größer ist als der Zähler, hat den Wert $\frac{8}{9}$. Wie heißt der Bruch?

33. Ein Bruch, dessen Zähler um 2 größer ist als der Nenner, erhält den Wert 2, wenn man zum Zähler 15 und zum Nenner 5 addiert. Welches ist der Bruch?

34. Ein Bruch, dessen Nenner um 9 größer ist als sein Zähler, erhält den Wert 5, wenn man den Zähler um 65 vermehrt, den Nenner um 12 vermindert. Wie heißt der Bruch?

35. Die Zahl 153 soll so in zwei Teile geteilt werden, daß 9 herauskommt, wenn man den größeren der beiden Teile durch die Differenz beider Teile dividiert. Wie heißen die Teile?

36. Dividiert man 5 durch das um 11 vermehrte 4fache einer gewissen Zahl, so erhält man ebenso viel wie wenn man 7 durch das um 5 verminderte 9fache derselben Zahl teilt. Wie heißt dieselbe?

37. Welche Zahl muß man zum Zähler und Nenner der Brüche $\frac{16}{31}$ und $\frac{11}{23}$ addieren, damit die entstandenen Brüche denselben Wert erhalten?

38. Welche Zahl muß zum Zähler und Nenner des Bruches $\frac{a}{b}$ addiert werden, damit er den Wert $\frac{p}{q}$ erhält?

39. Um welche Zahl muß man Zähler und Nenner der Brüche $\frac{15}{19}$ und $\frac{17}{22}$ vermindern, damit die entstandenen Brüche im Werte gleich sind?

40. Die Quersumme einer zweistelligen Zahl ist 8. Die hintere Ziffer ist 3mal so groß wie die vordere. Wie heißt die Zahl?

41. In einer zweistelligen Zahl, deren Quersumme 9 beträgt, ist der Wert der vorderen Ziffer $1\frac{1}{4}$mal so groß wie derjenige der hinteren. Wie groß ist die Zahl?

42. Die letzte Ziffer einer zweistelligen Zahl ist um 5 größer als die erste. Die Zahl selbst ist gleich dem um 14 verminderten 7fachen ihrer letzten Ziffer. Wie heißt die Zahl?

43. Welche Ziffer muß man zwischen die Ziffern der Zahlen 46 und 31 schieben, damit die Summe der entstandenen Zahlen 807 beträgt?

44. Die Quersumme einer zweistelligen Zahl ist 8. Setzt man die hintere Ziffer vor die vordere, so ist die neue Zahl um 17 kleiner als das Doppelte der ursprünglichen Zahl. Wie heißt die Zahl?

45. An eine gewisse Zahl setze man rechts eine 3, dividiere dann durch 7, setze an die entstandene Zahl rechts eine 6 und multipliziere die Summe mit 2. Man erhält 192. Wie heißt die ursprüngliche Zahl?

46. „Ich denke mir eine Zahl," sagte ein Rechenmeister zu seinen Schülern, „versucht sie zu erraten. Ich multipliziere meine Zahl mit 3, addiere zum Produkt 21, dividiere die Summe durch 5, subtrahiere vom Quotienten 7, multipliziere die Differenz mit 15 und erhalte 30. Welches ist die gedachte Zahl?"

47. Welche Zahl muß man zu den Zahlen 16; 23; 7 und 11 addieren, damit eine Proportion entsteht?

48. Welche Zahl muß man von m und n subtrahieren, damit sich die entstandenen Zahlen wie p : q verhalten?

49. Um wieviel muß man die Zahlen 26; 50; 41; 85 vermindern, damit die entstandenen Zahlen eine Proportion bilden?

50. Vermindert man eine Zahl um a, bzw. um b, so verhalten sich die entstandenen Differenzen wie m : n. Wie heißt die Zahl?

51. Welche Zahl muß man von m subtrahieren und zu n addieren, damit die entstandenen Zahlen sich wie p : q verhalten?

52. Wie heißt die Zahl, um die man die Zahlen 5 und 32 vermehren und die Zahlen 63 und 144 vermindern muß, damit die entstandenen Zahlen eine Proportion bilden?

53. Welche Ziffer ist bei den Zahlen 1; 3; 9 und 21 anzuhängen, damit sich eine Proportion ergibt?

54. Welche Ziffer ist den Zahlen 2; 4; 8 und 15 anzuhängen, damit eine Proportion entsteht?

---

b) Aufgaben aus Hauswirtschaft und Handel.

55. Eine Hausfrau hat beim Schlächter und beim Gemüsehändler zusammen 19,75 *M* zu zahlen. Wieviel hat jeder zu bekommen, wenn die Rechnung des Schlächters 8,65 *M* höher ist als die des Gemüsehändlers?

56. Es sollen 1450 hl Weizen geliefert werden. A, B und C übernehmen die Lieferung. A liefert 130 hl weniger als B und C 510 hl mehr als A. Wieviel liefert jeder?

57. Zwei Familien teilen sich in eine Waggonladung Kohlen von 10000 kg so, daß die eine 1570 kg mehr als den doppelten Anteil der anderen übernimmt. Wieviel übernimmt jede?

58. A, B und C teilen sich ein Faß Wein von 413 l. B nimmt doppelt so viel wie A, und C doppelt so viel wie B. Wieviel erhält B?

59. Der dritte Teil meiner Jahreseinnahme wird für Kost, $\frac{1}{6}$ für Miete, $\frac{1}{10}$ für Kleidung, $\frac{1}{8}$ für Reisen, $\frac{1}{12}$ für Nebenausgaben verbraucht. Wie groß ist mein Einkommen, wenn ich 1150 *M* übrig behalte?

60. Im Papyrus Rhind*), einem mathematischen Handbuch der Ägypter, das ca. 2000 Jahre v. Chr. verfaßt worden ist, findet sich folgende Aufgabe: „Vorschrift zu verteilen 700 Brote unter vier Personen, $\frac{2}{3}$ (einer gewissen Anzahl!) für einen, $\frac{1}{2}$ für den zweiten, $\frac{1}{3}$ für den dritten, $\frac{1}{4}$ für den vierten".

61. Ein Feld von 233,75 a soll unter 3 Bauern A, B und C so geteilt werden, daß A halb so viel erhält wie B und C $2\frac{1}{2}$ mal so viel wie A. Wieviel a erhält jeder?

62. Es werden a kg einer Ware zu p *Pf* mit einer anderen Sorte zu q *Pf* gemischt. Ein kg der Mischung stellt sich auf n *Pf*. Wieviel kg der zweiten Sorte waren genommen?

63. Ein Kaufmann mischt 25 kg Kaffee à 3,20 *M* mit 15 kg à 2,40 *M*. Wie teuer wird 1 kg der Mischung?

64. Jemand mischt 180 kg Tee zu 6 *M* mit einer besseren Sorte, von der

$180 \cdot 6$ M $x \cdot 7{,}2$ M

$(180 + x) \cdot 6{,}7$ M

das kg 7,20 *M* kostet. Wieviel kg dieser Sorte hat er zu nehmen, wenn 1 kg Mischung 6,70 *M* wert sein soll?

65. Es werden 120 l Moselwein à 1,50 *M* mit 80 l einer geringeren Sorte so gemischt, daß 1 l der Mischung 1,34 *M* wert ist. Wie teuer ist 1 l der geringeren Sorte?

66. 175 l Essig à 0,26 *M* sollen mit so viel Wasser verdünnt werden, daß das Liter der Mischung mit 0,20 *M* verkauft werden kann. Wieviel Liter Wasser sind erforderlich?

67. Frau A kauft Birnen und Äpfel. Ein Pfund Birnen kostet 0,30 *M*, ein Pfund Äpfel 0,25 *M*. Wieviel von jeder Art hat sie gekauft, wenn sie im ganzen 36 Pfund eingekauft und 9,80 *M* bezahlt hat?

68. „Item eyner hat Pomerantzen veyl, komet ein gut gesel, fragt, was kost eyne, man antwurt im sprechende, souil 3 mehr kosten den**) 4 *Pf*, souil kosten 4 mehr den**) 10 *Pf*. Nun frage ich, wiuil eyne kost?" (Adam Riese.)

---

*) Herausgegeben von Aug. Eisenlohr. Leipzig 1877.

**) den = denn.

69. In der Coß von Christoff Rudolff, gebessert und sehr gemehrt von Michael Stifel (Königsberg 1553), stehen die beiden folgenden Aufgaben:

a) „Ein herr hat einen diener, dem soll er zu jar lon gebn, 10 Fl.*) vnd einen Rock. Der knecht dienet 7 monat / vnd darnach werden sye miteinandre zwyträchtig und aufffstössig / das sye miteinander abrechnen. Trifft die Rechnung dem herren zu geben dem knecht den Rock vnd 2 Fl. Was ist der Rock weerdt?"

b) „Ich verkauff von einem tuch das halbteyl deß stücks / weniger 10 eln, bleyben noch über zwey dritteyl des tuchs vnd 4 eln. Wie vil helt das stück?"

70. Jemand hat in einem Monat im ganzen 22 Briefe abgesandt, zu 10 ₰ und 20 ₰ und dafür 2,90 ℳ Porto bezahlt. Wieviel Briefe jeder Art waren es?

71. Ein Weinhändler mischt 400 l Wein, das l zu 1,50 ℳ, mit einer geringeren Sorte, das l zu 1,20 ℳ. Er verkauft das l der Mischung mit 1,45 ℳ und verdient 130 ℳ. Wieviel l der geringeren Sorte enthält die Mischung?

72. B hat 2 Sorten Reis, das kg zu 0,40 ℳ und 0,62 ℳ. Er mengt die beiden Sorten und verkauft 1 kg des Gemenges mit 0,56 ℳ. Wieviel kg der teureren Sorte hat er mit 35 kg der geringeren gemengt, wenn er 4,40 ℳ verdient?

73. Aus zwei Sorten Getreide, von denen 1 hl 11,50 ℳ, bzw. 16 ℳ gekostet hat, werden 300 hl Gemenge hergestellt. Um 240 ℳ zu verdienen, verkauft der Händler 1 hl des Gemenges mit 13,50 ℳ. Wieviel hl der geringeren Sorte hat er genommen?

74. Wieviel Liter Spiritus von 65% müssen zu 150 l Spiritus von 80% zugegossen werden, wenn die Mischung 70prozentig sein soll?

75. Aus zwei Sorten Spiritus von 35% und 48% soll eine Mischung von 60 l Spiritus von $39\frac{1}{3}$% hergestellt werden. Wieviel Liter von jeder Sorte sind zu nehmen?

---

*) Fl. ist eine Abkürzung von Florin. Florin (Gulden) ist ursprünglich der Name einer seit dem 13. Jhrh. in Florenz geprägten Goldmünze, dann auch der Name verschiedener anderer Gold- und Silbermünzen.

76. Mit 150 kg Sole von 10% werden 350 kg von 8% gemischt. Wieviel Prozent Sole enthält die Mischung?

77. Wie groß ist der Feingehalt einer Legierung, die aus 250 g Silber von 880 Feingehalt und 150 g Kupfer zusammengeschmolzen wird?

78. Ein Goldarbeiter schmelzt 40 g Gold von 580 Feingehalt und 60 g Gold von 820 Feingehalt zusammen. Welchen Feingehalt hat die Mischung?

79. 5 g 22karätiges Gold werden mit 10 g 16karätigem Gold zusammengeschmolzen. Wievielkarätig wird die Legierung?*)

80. Ein Goldarbeiter braucht 3 kg 800haltiges Silber, er hat aber nur 750haltiges und 900haltiges. Wieviel von jeder Sorte muß er nehmen, um die gewünschte Legierung zu erhalten?

81. Ein Goldschmied braucht zur Ausführung eines Auftrages 2 kg 750haltigen Goldes; er hat aber nur 900haltiges und 700haltiges. Wieviel von jeder Art muß er nehmen?

82. „Ich hab zweyerley sylber. Deß ersten halt die marck 12 lot. Des andern halt die marck 15 lot. Nu will ich von diesen sylber ein marck machen / Das 13 lot halte. Ist die frag wie viel ich von yede sylber nemen müsse zumachn ein solliches marck." (16 lot macht ein marck.)**)

83. Wie hoch ist der Ladenpreis eines Buches, das mit 24% Verlust für 15,20 ℳ verkauft wird?

84. Wieviel kg Kaffeebohnen sind erforderlich, um 17 kg gerösteten Kaffee zu geben, wenn sie beim Rösten 15% ihres Gewichts verlieren?

85. Ein Kaufmann verkauft ein Stück Tuch mit 20% Gewinn für 75,60 ℳ. Wieviel m enthielt das Stück, wenn 1 m für 3,50 ℳ gekauft wurde?

86. Beim Verkauf einer Sendung Birnen, die 20,70 ℳ gekostet hatte, verdient die Obsthändlerin 15%. Wieviel kg Birnen enthielt die Sendung, wenn die Händlerin 1 kg mit 0,60 ℳ verkaufte?

87. Ein Sortimentsbuchhändler bezieht vom Verlagsbuchhändler einen Posten Bücher. Wie groß war die Rechnung, wenn die Barzahlung, bei der 25% Rabatt bewilligt wurden, 276 ℳ betrug?

88. Ein Posten beschädigter Ware wird mit $4\frac{1}{4}$% Verlust für 4596 ℳ verkauft. Wie hoch war der Einkaufspreis?

89. Ein Hamburger Engrosgeschäft läßt Kaffee in Säcken kommen. Der Zoll auf einen Doppelzentner beträgt 60 ℳ, die Tara für Säcke 1%. Wie hoch ist der Zoll, wenn das Bruttogewicht der Sendung 500 kg beträgt?

---

*) Früher wurde die Feinheit der Goldlegierungen in Karaten, d. h. in Vierundzwanzigsteln, bestimmt. 22karätige Legierungen z. B. enthielten an Feingold $\frac{22}{24}$ des Gesamtgewichts.

**) Aus der Coß von Chr. Rudolff.

90. Der Zollsatz für 1 dz Rohrzucker beträgt 40 ℳ, die Tara für Rohrzucker in Fässern 12%. Wieviel Zoll ist auf eine Sendung von 1500 kg Brutto zu entrichten?*)

91. Für eine Sendung Tee von 15 kg werden unter Anrechnung von 20% Rabatt 72 ℳ bezahlt. Wieviel sollte 1 kg kosten?

92. Jemand kauft 2 Posten Ware, die zusammen 1100 ℳ kosten sollen. Bei dem ersten Posten werden 5%, bei dem zweiten 12% Rabatt bewilligt, so daß nur 1024 ℳ zu zahlen sind. Wieviel sollte jeder Posten kosten?

93. Eine Ware im Betrage von a ℳ wird unter Anrechnung von p % Rabatt verkauft. Wieviel kostete sie im Einkauf?

94. Wenn A eine Ware mit $4\frac{1}{2}$% Gewinn verkauft, so verdient er 1,40 ℳ weniger, als wenn er sie mit $6\frac{1}{4}$% Gewinn verkauft. Wieviel hatte die Ware im Einkauf gekostet?

95. Ein Kaufmann erhält 80 kg Kaffee und 100 kg Tee. Die Preise von 1 kg Kaffee und 1 kg Tee verhalten sich wie 3 : 5. Wieviel hatte der Kaufmann für 1 kg Kaffee bezahlt, wenn er am Kaffee 20%, am Tee 24% verdiente und im ganzen 134,40 ℳ gewann?

96. Eine Sendung Pfirsiche kostete 50 ℳ und verursachte 2,70 ℳ Unkosten. Unterwegs verdarben 5% der Früchte. An den anderen wurden 10 ℳ verdient. Wieviel Pfirsiche enthielt die Sendung, wenn ein Pfirsich durchschnittlich mit 6 ₰ verkauft wurde?

97. B verkaufte $\frac{1}{3}$ seiner Ware mit 20% Gewinn. Von dem übrig gebliebenen Teil verkaufte er $\frac{1}{4}$ mit 12% Gewinn, während er am Rest 10% verlor. Der Gewinn betrug 77 ℳ. Zu welchem Preise ist die Ware verkauft worden?

---

c) Aufgaben aus dem Geldverkehr.

98. A und B teilen sich 100 ℳ so, daß A 32 ℳ mehr erhält als B. Wieviel erhält jeder?

99. Unter 4 Personen sind 2580 ℳ so zu verteilen, daß jede folgende 30 ℳ mehr erhält als die vorhergehende. Wieviel erhält die letzte?

100. A, B und C besitzen zusammen 950 ℳ, und zwar hat B 70 ℳ weniger als A und C 270 ℳ mehr als A. Wieviel hat jeder?

101. Drei Personen sollen sich in 185 ℳ so teilen, daß jede folgende $\frac{1}{3}$ mehr bekommt als die vorhergehende. Wieviel erhält jede?

102. Jemand gibt $\frac{1}{4}$ und $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{8}$ seiner Barschaft aus und behält noch 13,50 ℳ. Wieviel Geld hatte er anfangs?

*) Die Prozente Tara beziehen sich auf das Bruttogewicht.

103. Jemand hinterließ den Armen eines Spitals 745 ℳ und verfügt testamentarisch, daß ein Teil der Summe an die 7 Männer, der andere an die 8 Frauen des Spitals gegeben werden soll. Wieviel erhält jede Frau, wenn auf einen Mann und eine Frau zusammen 100 ℳ fallen?

104. A gewinnt an einem Geschäft 6750 ℳ, $3\frac{3}{4}$ mal so viel wie B. Wie groß ist der Gewinn des B?

105. Zwei Personen teilen sich 3500 ℳ im Verhältnis von 4:3. Wieviel erhält jede?

106. Wieviel bekommt jede von 3 Personen von 4966,50 ℳ, wenn sie sich die Summe im Verhältnis von 5:4:2 teilen?

107. Eine Erbschaft von 1800 ℳ soll unter A, B und C so verteilt werden, daß B 800 ℳ mehr als doppelt so viel erhält wie A und C 500 ℳ weniger, als der vierfache Anteil des A beträgt. Wieviel erhält jeder?

108. 2190 ℳ sollen an 3 Personen A, B und C in der Weise verteilt werden, daß B 6 mal so viel erhält wie C und noch 75 ℳ und A $\frac{2}{3}$ mal so viel wie B und 85 ℳ. Wieviel bekommt jeder?

109. Zu einem Unternehmen gibt A $\frac{1}{4}$ der Gesamteinlage, B $\frac{4}{5}$ mal so viel wie A, C ebenso viel wie A und B zusammen und D den Rest im Betrage von 832,50 ℳ. Mit welchem Kapital hat sich A beteiligt?

110. Jemand vermacht in seinem Testament seinem ältesten Sohn $\frac{1}{4}$ des hinterlassenen Vermögens, seinem zweiten Sohne $\frac{5}{4}$ mal so viel wie dem ältesten, seiner Tochter doppelt so viel wie dem ältesten Sohne weniger 2000 ℳ und den Armen der Stadt die noch übrigen 500 ℳ. Wie groß war das hinterlassene Vermögen?

111. Drei Personen A, B und C teilen sich so in 3750 ℳ, daß A $\frac{2}{3}$ mal so viel wie B und noch 50 ℳ, C $\frac{4}{5}$ mal so viel wie B weniger 148 ℳ erhält. Wieviel bekommt jeder?

112. Aus einer Konkursmasse von 59850 ℳ sollen vier Gläubiger nach dem Verhältnis ihrer Forderungen befriedigt werden. Die Forderung des A verhält sich zu der des B wie 1:2, die des B zu derjenigen des C wie 3:4 und die des C zu der des D wie 5:6. Wieviel erhält A?

113. Ein Mädchen hebt von ihrem Gelde auf der Sparkasse zuerst $\frac{1}{4}$ ab und danach $\frac{1}{5}$ des Restes. Sie ist später aber imstande, $\frac{1}{2}$ der ursprünglichen Summe einzuzahlen, so daß ihr Sparkassengeld 9,20 ℳ mehr beträgt als anfangs. Wie groß war die Summe, die sie vor dem Abheben auf der Sparkasse stehen hatte?

114. „Zwen haben eyngelegt 100 Fl.*) / Teylen den gwin gleych. Ist der ein mit seinem gelt gestanden im handel 3 Monden / Der ander 7 Monden. Ist die frag was jeder in sonderheyt hab eyngelegt.“ (Christoff Rudolff.)

115. „Drey gsellen teylen 356 Fl. also. So offt der erste nympt 2 Fl., so offt nympt der ander $2\frac{1}{2}$ Fl. vnd so offt der ander nymt 3 Fl., so offt nympt der dritt $3\frac{1}{2}$ Fl. Wie viel wirt yedem?“ (Christoff Rudolff.)

116. Welches Kapital bringt zu p % in n Jahren q ℳ Zinsen?

117. Wie groß muß das Kapital sein, das zu 3% in einem Jahre 144 ℳ Zinsen bringt?

118. Ein Kapital ist zu $3\frac{1}{2}$% auf ein Jahr ausgeliehen worden. Nach Verlauf dieses Jahres betragen Kapital und Zinsen zusammen 2070 ℳ. Wie groß war das Kapital?

119. Ein Kapital, das zu $3\frac{1}{2}$% ausgeliehen ist, wächst in 3 Jahren mit den einfachen Zinsen auf 939,25 ℳ an. Wie groß war dasselbe anfangs?

120. Jemand hat zwei gleich große Kapitalien ausgeliehen, das erste zu 4%, das zweite zu $4\frac{1}{2}$%. Die jährlichen Zinsen betragen zusammen 90 ℳ. Wie groß ist jedes Kapital?

121. Zwei Kapitalien, von denen das zweite $\frac{3}{4}$ mal so groß ist wie das erste, sind zu $4\frac{1}{2}$%, bzw. 5% ausgeliehen. Wie groß ist jedes von ihnen, wenn die jährlichen Zinsen zusammen 231 ℳ betragen?

122. Von zwei Kapitalien, von denen das zweite um 500 ℳ größer ist als das erste, ist das erste zu $3\frac{1}{2}$% auf 4 Jahre, das andere zu 4% auf $5\frac{1}{2}$ Jahre ausgeliehen. Beide bringen zusammen 362 ℳ Zinsen. Wie groß ist das erste?

123. Von zwei Kapitalien ist das zweite um 1000 ℳ kleiner als das erste. Das erste ist 5 Jahre zu $3\frac{1}{3}$%, das zweite 8 Jahre zu $4\frac{1}{4}$% ausgeliehen. Wie groß ist jedes der beiden Kapitalien, wenn sie zusammen 1484 ℳ Zinsen bringen?

124. Zwei Kapitalien betragen zusammen 1000 ℳ. Das erste ist zu $3\frac{2}{3}$% auf 1 Jahr 3 Monate, das zweite zu $4\frac{1}{2}$% auf 2 Jahre 2 Monate ausgeliehen. Wie groß ist jedes von ihnen, wenn sie zusammen 69,60 ℳ Zinsen bringen?

125. Von drei gleich großen Hypotheken ist die eine zu $3\frac{1}{2}$%, die zweite zu 4%, die dritte zu $4\frac{1}{2}$% aufgenommen. Wie groß ist jede Hypothek, wenn alle drei zusammen in 2 Jahren mit 144 ℳ zu verzinsen sind?

*) Über Fl. s. Anm. S. 103.

126. Von 3 Kapitalien ist das zweite $\frac{5}{3}$ mal, das dritte $\frac{2}{5}$ mal so groß wie das erste. Das erste ist zu $3\frac{3}{4}\%$, das zweite zu 4%, das dritte zu $4\frac{1}{2}\%$ ausgeliehen. Wie groß ist jedes der Kapitalien, wenn alle drei zusammen jährlich 366,50 ℳ Zinsen bringen?

127. Jemand hat $\frac{1}{4}$ seines Vermögens zu 4%, den Rest zu $3\frac{1}{2}\%$ angelegt. Die halbjährigen Zinsen betragen 725 ℳ. Wie groß ist sein Vermögen?

128. Jemand hat den dritten Teil seines Vermögens zu 5%, den vierten Teil zu $3\frac{1}{2}\%$ und den sechsten Teil zu $4\frac{1}{2}\%$ angelegt. An dem Rest, mit dem er sich an industriellen Unternehmungen beteiligte, verlor er 4%. Wie groß war sein Kapital, wenn er jährlich 275 ℳ Zinsen einnahm?

129. Ein Fabrikant leiht sich zur Einrichtung seiner Fabrik zwei Kapitalien, von denen er das erste mit 3%, das zweite, welches 2000 ℳ größer ist als das erste, mit $4\frac{1}{2}\%$ verzinsen muß. Hätte er jährlich 40 ℳ Zinsen mehr zu zahlen, so verzinsten sich die beiden Kapitalien durchschnittlich mit 4%. Wie groß sind dieselben?

130. Wieviel Zinsen bringen k ℳ Kapital zu p % in n Jahren?

131. Wieviel ℳ Zinsen bringen 1200 ℳ zu $3\frac{3}{4}\%$ in 3 Jahren?

132. Berechne die Zinsen von 948 ℳ zu 4% in 3 Jahren 8 Monaten?

133. Ein Kapital war nach Verlauf von 2 Jahren zu 4% auf 5400 ℳ angewachsen. Wie groß waren die Zinsen?

134. Annas Geld in der Sparkasse wuchs zu 3% in $3\frac{1}{2}$ Jahren auf 386,75 ℳ an. Wieviel betrugen die Zinsen?

135. Auf ein Lotterielos fällt ein Gewinn von 12000 ℳ. Für den Staat und den Einnehmer kommen $15\frac{1}{3}\%$ in Abzug. Wieviel erhält der Gewinner?

136. Zwei Verwandte erben zusammen 30000 ℳ. Da der erste dem Erblasser näher verwandt war als der zweite, so zahlt er nur $2\frac{1}{2}‰$, der zweite dagegen $4\frac{1}{2}‰$ Erbschaftssteuer. Die Erbschaftssteuer des ersten beträgt 9 ℳ weniger als die des zweiten. Wie groß sollte die Erbschaft des ersten sein?

137. k ℳ bringen in n Jahren q ℳ Zinsen. Zu wieviel Prozent sind sie ausgeliehen?

138. Zu wieviel Prozent sind 2640 ℳ ausgeliehen, wenn die jährlichen Zinsen 105,60 ℳ betragen?

139. Zu wieviel % sind 4500 ℳ ausgeliehen, wenn sie in $3\frac{1}{2}$ Jahren ebenso viel Zinsen bringen wie 8100 ℳ zu $3\frac{1}{2}\%$ in $2\frac{1}{2}$ Jahren?

140. Jemand verleiht 6000 M zu $3\frac{1}{2}$%. Fünf Jahre später verleiht er 8000 M. Nach Verlauf von weiteren 5 Jahren haben beide Kapitalien gleichviel Zinsen gebracht. Zu wieviel % sind die 8000 M ausgeliehen worden?

141. Ein Landmann übernahm aus der väterlichen Erbschaft ein Gut im Werte von 360000 M und verpflichtete sich, den Erbanteil seiner Geschwister im Betrage von 270000 M mit 4% zu verzinsen. Im ersten Jahre behielt er nach Auszahlung der Zinsen und Abzug seiner Haushaltskosten, die sich auf 9000 M beliefen, 1800 M übrig. Wieviel % vom Werte des Gutes hatte er verdient?

142. In welcher Zeit bringen k M zu p % q M Zinsen?

143. In wieviel Jahren erhält man von 600 M zu $3\frac{1}{2}$% 105 M Zinsen?

144. Wie lange mußten 7000 M zu $4\frac{1}{2}$% verzinst werden, um 630 M Zinsen mehr zu bringen als 9000 M zu $3\frac{1}{2}$% in 6 Jahren?

145. Jemand gibt 6400 M zu $3\frac{1}{2}$% auf Zinsen und 3 Jahre später 14000 M zu 4%. Wieviel Jahre nach der Einzahlung des zweiten Kapitals wird dasselbe ebenso viel Zinsen gebracht haben wie das erste?

146. Eine Schuld von a M, die erst nach n Jahren fällig ist, wird mit p % jährlichem Diskont abgetragen. Wie groß ist die Barzahlung?

147. Eine Schuld von 840 M wird 10 Monate vor dem Zahlungstermin unter Anrechnung von 5% Diskont jährlich abgetragen. Wieviel M sind zu zahlen?

148. Ein Wechsel über 750 M wird 3 Monate vor seinem Verfall mit $4\frac{1}{2}$% diskontiert. Wieviel ist zu zahlen?

149. Wie groß ist eine Schuldsumme, die $3\frac{1}{2}$ Jahre vor dem Zahlungstermin unter Anrechnung von 5% Diskont mit 660 M abgetragen wird?

150. Ein am 1. Oktober fälliger Wechsel wird am 25. August mit $5\frac{1}{2}$% Diskont für 198,90 M verkauft. Auf welche Summe ist er ausgestellt?

151. Der bare Wert einer nach 3 Monaten fälligen Schuld von 570 M beträgt 561,45 M. Wieviel Prozent Diskont sind berechnet worden?

152. Ein Wechsel auf 2460 M, der am 27. Februar fällig ist, wird am 15. Dezember mit 2435,40 M diskontiert. Wieviel Prozent beträgt der Diskont?

153. Eine Schuld von 350 M wird unter Anrechnung von $4\frac{1}{2}$% Diskont mit 339,50 M bezahlt. Wieviel Monate vor dem Zahlungstermin ist gezahlt worden?

154. Am 13. September wird ein Wechsel über 8400 ℳ unter Abzug von 6% Diskont mit 8358 ℳ eingelöst. An welchem Tage war der Wechsel fällig?

155. Jemand hat eine bestimmte Schuldsumme nach 4 Monaten und eine andere ebenso große nach 10 Monaten zurückzuzahlen. Der bare Wert der beiden Summen zusammen beträgt bei 5% jährlichem Diskont 1747,50 ℳ. Wie groß ist jede von ihnen?

156. A hat nach einer bestimmten Anzahl von Monaten 1260 ℳ und noch $3\frac{1}{2}$ Monate später 1680 ℳ zu zahlen. Da ihm bei Barzahlung 8% Diskont bewilligt werden, so tilgt er seine Schuld sofort durch Zahlung von 2734,20 ℳ. Nach wieviel Monaten war die erste Summe fällig?

157. Zwei Wechsel über 840 ℳ, bzw. 720 ℳ, von denen der zweite $4\frac{1}{2}$ Monate später fällig ist als der erste, werden bei 6% jährlichem Diskont für zusammen 1508,70 ℳ verkauft. Nach wieviel Monaten war der erste fällig?

---

d) Bewegungsaufgaben.*)

158. Zwei Abteilungen Soldaten, die m km voneinander entfernt stehen brechen gleichzeitig auf und marschieren sich entgegen. Die erste legt, a km, die zweite b km in der Stunde zurück. Nach wieviel Stunden treffen sie sich?

159. A und B, welche 39 km voneinander wohnen, brechen morgens um 7 Uhr auf und gehen sich entgegen. A legt in einer Stunde 3 km, B $3\frac{1}{2}$ km zurück. Wann werden sie sich treffen?

160. Um 8 Uhr fahren aus den Orten M und N zwei Automobile einander entgegen. Die Entfernung der beiden Orte beträgt 176 km. Wann werden sich die Kraftwagen treffen, wenn der eine durchschnittlich 36 km, der andere 44 km in der Stunde zurücklegt?

161. „Es sind von Nürnberg gen Rom 140 Meyl. Nu gehn zwen botte zu gleich auſs. Einer von Rom gen Nürnberg vnd geht täglich 6 meyl. Der ander von Nürnberg gen Rom geht täglich 8 meyl. In wie vil tagen kommen sye zusamen?“ (Christoff Rudolff.)

162. „Item eyner will von Rom gegenn deutschen Landes, geht alle tag 7 meyl, Eyn ander gut gesell will hinein, hat 300 meyl. Reit alle tag 9 meyl. In wiuil tagenn komen sie zusamen?“ (Adam Riese.)

---

*) Vgl. die Figur auf S. 92.

163. „Item ein Vater und eyn sohnn wollen den heiligen Santt peter Zu rom besuchen. Der sohnn geth alletag 9 meyl und der vater hat 100 befor und geht alletag 6 meyl, Ist ehr außgangenn dan der sohnn. In winil tagenn komen sie zusamen?“ (Adam Riese.)

164. Ein Fischbehälter, der $658\frac{1}{2}$ cdm faßt, kann durch 2 Röhren gefüllt werden. Die eine liefert 215 l, die andere 224 l in der Stunde. Nach welcher Zeit wird der Behälter gefüllt sein, wenn beide zugleich fließen?

165. Ein Behälter von 1040 cdm Rauminhalt hat eine Zuflußröhre und eine Abflußröhre. Durch erstere fließen 48 l, durch letztere 35 l in der Minute. Als er gefüllt werden sollte, war vergessen worden, die Abflußröhre zu schließen. Nach welcher Zeit wird er demnach erst gefüllt sein?

166. Einem Boten, der stündlich 3 km zurücklegt, wird 2 Stunden nach seinem Fortgang vom Orte A ein anderer Bote nachgesandt, der 4 km in der Stunde macht. Wieviel Stunden war der erste Bote unterwegs, als er vom zweiten eingeholt wurde?

167. Einem Boten, der stündlich 4 km zurücklegte, wurde 7 Stunden nach seinem Fortgang ein anderer Bote nachgesandt. Wieviel Stunden wird der zweite, der stündlich 7 km zurücklegt, brauchen, um den ersten einzuholen?

168. Aus einem Orte O fährt ein Radfahrer ab und legt in der Stunde $15\frac{1}{2}$ km zurück. In P, das 12 km hinter O liegt, bricht gleichzeitig ein anderer Radfahrer auf, der stündlich $17\frac{1}{2}$ km macht. Wieviel Stunden wird dieser brauchen, um den ersten einzuholen?

169. A geht von einem Orte M aus und legt täglich 30 km zurück. a) Wieviel Tage nach seinem Fortgange wird er von B eingeholt werden, wenn dieser 3 Tage später von M fortgeht und täglich 45 km macht? b) Wieviel km hinter M holt B den A ein?

170. Einem Fußgänger, der stündlich 4 km macht, wurde 4 Stunden nach seinem Weggang ein Radfahrer nachgeschickt, der stündlich 8 km mehr zurücklegte. Wieviel Stunden war der Fußgänger unterwegs, als der Radfahrer ihn einholte?

171. Zwei feindliche Truppen standen 135 km voneinander entfernt. Die erste Truppe rückte ab und legte täglich 30 km zurück. Die zweite setzte nach, und zwar so schnell, daß sie jene in 6 Tagen erreichte. Wieviel km hatte sie täglich zurückgelegt?

172. Zwei Automobile fahren aus den Orten O und P gleichzeitig ab und einander entgegen. Nach welcher Zeit werden sie sich begegnen, wenn das erste die Strecke PO in 5, das zweite in $6\frac{1}{2}$ Stunden zurücklegen würde?

173. Öffnet man den Kaltwasserhahn einer Badewanne, so wird die Wanne in 10 Minuten gefüllt, während die Zuflußröhre des warmen Wassers die Wanne in 8 Minuten füllen würde. In welcher Zeit werden beide Röhren zusammen die Wanne füllen?

174. „Vier Springbrunnen es gibt. Die Zistern' anfüllet der erste
täglich; der andere braucht zwei Tage dazu und der dritte
Drei, und der vierte gar vier. Welch' Zeit nun brauchen zugleich sie?"

175. „Löwe von Erz, hier steh ich; es sind Springquellen mir beide
Augen und Mund und die Sohl', rechts an dem Fuße, zusammt.
In zwei Tagen wohl füllt die Zisterne das Auge zur Rechten,
dieses zur Linken in drei, aber die Sohle in vier.
Endlich genügen dem Mund sechs Stunden zur Füllung.
Wie lang wirds, wenn sie nun strömen zugleich, Augen und Sohle
und Mund?"

176. Zwei Orte, M und N, sind 30 km voneinander entfernt. Von ihnen aus fahren zwei Wagen I und II einander entgegen. I legt 22 km in je 3 Stunden, II nur 28 km in je 6 Stunden zurück. a) Nach wieviel Stunden treffen sie sich? b) Wieviel km hat I zurückgelegt?

177. Zwei Körper bewegen sich aus einer Entfernung von $57\frac{1}{6}$ m einander entgegen. I legt in 4 Minuten 69 m, II in 3 Minuten 34 m zurück. Nach wieviel Minuten treffen sie sich?

178. „Ein Has ist 90 sprüng vor einem Hund, und als offt der Has thut 12 sprüng, so offt thut der Hund 15 sprüng. Und springt alleweg der Has so weyt als der Hund. Ist die frag, wie oft müß der Hund 15 sprüng thun das er den Hasen ereyle?" (Christoff Rudolff.)

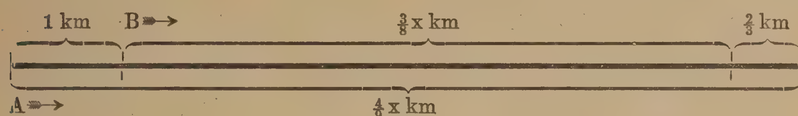
179. „Eine weiße Ameise bewegt sich an einem Tage um die Länge von 8 Gerstenkörnern weniger $\frac{1}{5}$ eines solchen vorwärts; sie kriecht in 3 Tagen um $\frac{1}{20}$ Finger zurück; in welcher Zeit würde sie unter diesen Verhältnissen ein Yôjana weit vorrücken? — Die Verhältniszahlen sind 8 Gerstenkörner = 1 Finger, 24 Finger = 1 Elle, 4 Ellen = 1 Stab, 8000 Stab = 1 Yôjana."*) (360 Tage = 1 Jahr.)

---

*) Aus Cantor Bd. I. Mathematik der Inder. S. 618.

180. Aus 2 Orten, die $2\frac{1}{4}$ km voneinander entfernt sind, fahren zwei Radfahrer A und B hintereinander her. A legt $\frac{2}{3}$ km, B $\frac{3}{10}$ km in der Minute zurück. Nach wieviel Minuten wird A den B bis auf $\frac{3}{4}$ km eingeholt haben?

181. Zwei Radfahrer A und B fahren hintereinander her. A legt $\frac{4}{9}$ km, B $\frac{3}{8}$ km in der Minute zurück. Nach wieviel Minuten wird A den B



um $\frac{2}{3}$ km überholt haben, wenn beide anfangs 1 km voneinander entfernt waren?

182. Ein Radfahrer fährt von M nach N in $4\frac{1}{2}$ Stunden. Er würde jedoch $\frac{1}{2}$ Stunde länger gebrauchen, wenn er stündlich 2 km weniger zurücklegte. a) Wieviel km legt er in der Stunde zurück? b) Wie weit ist M von N entfernt?

183. Wie groß ist die Geschwindigkeit des Windes, wenn das Luftschiff „Zeppelin III", dessen Eigengeschwindigkeit*) 50 km in der Stunde beträgt, zu einer Strecke von 400 km a) 3 Stunden weniger, b) 2 Stunden mehr gebrauchen würde als bei Windstille?

184. Zwei Regimenter stehen in den Orten A und B, die 221 km voneinander entfernt sind. Das Regiment aus A marschiert in der Richtung auf B und legt täglich 25 km zurück. Zwei Tage nach seinem Abmarsch marschiert das andere Regiment aus dem Orte B auf A zu. Wieviel Tage nach dem Ausmarsch des ersten werden sie sich gegenüberstehen, wenn das zweite Regiment täglich 32 km macht?

185. Aus A fährt um 2 Uhr nachmittags ein Dampfer nach B, der die Strecke in 4 Stunden zurücklegt. 12 Minuten später fährt von B nach A ein anderer Dampfer, dessen Fahrzeit 5 Stunden beträgt. Um welche Zeit begegnen sich die Dampfschiffe?

186. Ein Personenzug geht von A nach B mit einer Geschwindigkeit von m km in der Stunde. Nach q Stunden geht ein Schnellzug ab mit einer Geschwindigkeit von n km die Stunde. Wieviel Stunden nach Abfahrt des Schnellzuges wird der Personenzug von jenem eingeholt?

---

*) S. Anm. 1 S. 76.

187. Um 6 Uhr morgens fährt aus Berlin ein Personenzug ab, 4 Stunden später geht ein Schnellzug in derselben Richtung ab, der stündlich 22,5 km mehr macht als der Personenzug und diesen um 6 Uhr abends einholt. Wieviel km legt der Personenzug in der Stunde zurück?

188. Zwei Körper A und B bewegen sich auf der Peripherie eines Kreises von $37\frac{1}{3}$ m Umfang vom Punkte P aus in gleicher Richtung. A macht $2\frac{2}{5}$ m, B $3\frac{4}{15}$ m in der Sekunde. Nach wieviel Sekunden wird A zum ersten Male wieder mit B zusammentreffen?

189. Zwei Körper I und II machen $4\frac{5}{12}$, bzw. $5\frac{1}{2}$ m in der Sekunde. Sie bewegen sich von einem Punkte P aus in entgegengesetzter Richtung auf der Peripherie eines Kreises von $178\frac{1}{2}$ m Umfang. Nach wieviel Sekunden werden sie sich treffen?

190. Auf einer Radfahrbahn von 618 m Umfang fahren zwei Radfahrer A und B von derselben Stelle in entgegengesetzter Richtung ab, und zwar B 12 Sekunden nach A. A macht $4\frac{1}{2}$ m, B $3\frac{1}{3}$ m in der Sekunde. Wieviel Sekunden nach der Abfahrt des A treffen sie sich?

191. Um 12 Uhr stehen die beiden Zeiger der Uhr übereinander. a) Wieviel Minuten später werden dieselben wieder übereinander stehen? b) Um welche Zeit zwischen 2 und 3 Uhr, c) zwischen 3 und 4 Uhr stehen die Zeiger übereinander?

---

e) Aufgaben aus der Planimetrie.

192. Der eine **Winkel** eines Dreiecks beträgt $35^\circ 42'$, der zweite $54^\circ 25'$. Wie groß ist der dritte?

193. Wie groß ist der Nebenwinkel eines Winkels von $97^\circ 35'$?

194. Der eine von 2 Nebenwinkeln ist viermal so groß wie der andere. Wie groß ist der letztere?

195. Der eine spitze Winkel eines rechtwinkligen Dreiecks ist um $29^\circ 13' 20''$ größer als der andere. Wie groß ist der kleinere von beiden?

196. In einem Dreieck ist $\sphericalangle \alpha$ 3 mal so groß wie $\sphericalangle \beta$, und $\sphericalangle \gamma$ $\frac{1}{2}$ mal so groß wie $\sphericalangle \beta$. Wieviel Grad beträgt $\sphericalangle \beta$?

197. In einem Dreieck beträgt $\sphericalangle \alpha$ 54°, und $\sphericalangle \gamma$ ist 4 mal so groß wie $\sphericalangle \beta$. Wie groß ist $\sphericalangle \beta$?

198. Zwei Nebenwinkel verhalten sich wie 28 : 17. Wie groß ist jeder von ihnen?

199. Der Winkel an der Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks beträgt 42°. Wie groß ist ein Außenwinkel an der Basis?

200. In einem rechtwinkligen Dreieck beträgt der siebente Teil des einen spitzen Winkels vermehrt um den fünften Teil des andern 16°. Wie groß ist jeder von ihnen?

201. In einem gleichschenkligen Dreieck ist der Winkel an der Spitze $2\frac{1}{2}$ mal so groß wie ein Basiswinkel. Wie groß ist dieser?

202. Der Umfang eines gleichschenkligen **Dreiecks** beträgt $14\frac{2}{3}$ cm. Die Basis ist $\frac{2}{3}$ mal so lang wie ein Schenkel. Wie lang ist sie?

203. Der Umfang eines gleichschenkligen Dreiecks beträgt 50 cm. Ein Schenkel ist $\frac{3}{4}$ mal so lang wie die Basis. Wie lang ist diese?

204. Die Seiten eines Dreiecks sind $a = 15$ cm, $b = 16$ cm, $c = 10\frac{2}{3}$ cm. Die Höhe auf a mißt $6\frac{2}{5}$ cm. Wie lang sind die anderen Höhen?

205. Ein Quadrat von $112\frac{1}{2}$ qcm Inhalt soll einem Rechteck, dessen eine Seite 12,5 cm lang ist, flächengleich gemacht werden. Wie groß ist die andere Rechtecksseite zu nehmen?

206. In einem **Parallelogramm** ist jeder der stumpfen Winkel $1\frac{4}{7}$ mal so groß wie ein spitzer. Wie groß ist ein stumpfer Winkel?

207. Zwei Parallelogramme von gleicher Grundlinie sind 180 qm und 105 qm groß. Die Höhe des ersten ist 5 m größer als die des zweiten. Wie groß ist die Höhe des größeren?

208. Die eine Diagonale eines **Rhombus** ist 5 m größer als die andere. Verlängert man jede der Diagonalen um 3 m, so wächst der Inhalt des Rhombus um 24 qm. Wie groß sind die Diagonalen?

209. Der Inhalt eines Rhombus, dessen eine Diagonale 10 m größer ist als die andere, bleibt unverändert, wenn die größere Diagonale um 6 m verkürzt, die kleinere um 4 m verlängert wird. Wie groß sind Diagonalen und Flächeninhalt?

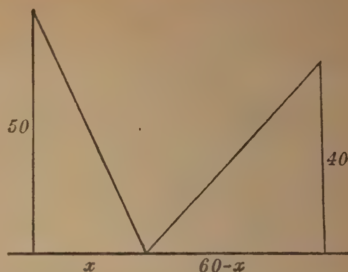
210. Der Flächeninhalt eines **Trapezes** beträgt 210 qcm, die Höhe 12 cm. Wie groß ist jede der Grundlinien, wenn sie sich wie 4 : 3 verhalten?

211. Berechne die Hypotenuse eines **rechtwinkligen Dreiecks,** dessen eine Kathete 21 m beträgt und dessen andere Kathete 7 m kleiner ist als die Hypotenuse.

212. Wie lang sind die Seiten eines gleichschenkligen Dreiecks von 16 cm Umfang, wenn das von der Spitze auf die Basis gefällte Lot 4 cm beträgt?

213. „Es ist ein Turn 100 eln hoch. vn̄ vmb den turn ein graben 18 eln weyt. vnd ein leyter 30 eln lang wird aussen am graben angesetzt mit dem oberen orth an den turn gelent. Ist die frag wie hoch die leyter reyche an den turn.“ (Rudolff.)

214. „Zwee Thurn stehn auff einer ebnen 60 eln von einander. Der ein ist 50 eln hoch. Der ander 40 eln hoch. Zwischen den zweyen Thurnen steht ein brunne / gleich weyt von den spitzen der zweyen Thurnen. Ist die frag wie fern steht der brunne vnden von yeden Thurn?“*)



215. In einem Rechteck von 12 cm Länge ist die kürzere Seite 8 cm kleiner als die Diagonale. Wie groß ist diese?

216. Im Kiu-tschang stehen folgende zwei Aufgaben:

a) „Ein 10 Fuß hoher Bambus ist nach oben hin gebrochen; berührt nun das obere Ende den Boden, so ist es drei Fuß von dem entgegengesetzten Ende entfernt. Wie hoch ist der Bambus bis zu dem Bruche?“**)

b) „Im Mittelpunkt eines Teiches, von 10 Fuß Länge und Breite, wächst ein Schilf, das sich einen Fuß hoch über das Wasser erhebt; als man es ans Ufer zog, reichte es nur bis an den Rand des Teiches. Welche Tiefe hat das Wasser?“**)

217. Die auf der Hypotenuse stehende Höhe in einem rechtwinkligen Dreieck beträgt 40 cm mehr als die Projektion der einen Kathete auf die Hypotenuse und 80 cm weniger als die Projektion der andern. Wie groß ist a) die Höhe, b) die Hypotenuse?

218. In einem Kreis ist eine Sehne, deren Entfernung vom Mittelpunkt des Kreises 8 cm beträgt. Der Radius ist 2 cm größer als die halbe Sehne. Wie groß ist die Sehne?

219. Eine Sehne von 24 mm Länge ist in einen Kreis von 26 mm Durchmesser eingetragen. Der Radius des Kreises ist 8 cm größer als der Abstand der Sehne vom Mittelpunkte. Wie weit ist sie vom Mittelpunkt entfernt?

220. An einen Kreis um M von 10 cm Durchmesser ist vom Punkte P die Tangente gelegt. Der Tangentenabschnitt ist 1 cm kürzer als die Strecke PM. Wie lang ist diese?

---

*) Aufgabe und Zeichnung aus der Coß von Rudolff.

**) Aus Biernatzki „Die Arithmetik der Chinesen.“ In Crelle, Bd. 52, p. 76. Vgl. S. 97, Nr. 102.

f) Aufgaben aus der Physik.

Geschwindigkeit.*)

221. Wie groß ist die mittlere Geschwindigkeit eines Fußgängers, der in 5 Stunden 27 km zurücklegt?

222. Ein Schnellzug fährt $7^{\underline{32}}$ aus Berlin ab und kommt $10^{\underline{52}}$ in Hamburg an. Wie groß ist seine mittlere Geschwindigkeit, wenn die Strecke 286 km beträgt?

223. Ein Personenzug legt die 255 km lange Strecke von Hannover nach Berlin in 6 Stunden 10 Minuten zurück, während ein Schnellzug, welcher 3^{15} aus Hannover abfährt, schon $6^{\underline{50}}$ in Berlin einläuft. Um wieviel ist die durchschnittliche Geschwindigkeit des letzteren größer als die des Personenzuges?

224. Ein geübter Schlittschuhläufer hat eine Geschwindigkeit von 12 m. Welche Strecke kann er in einer Viertelstunde zurücklegen?

225. Welches ist die mittlere Stromgeschwindigkeit der Donau, wenn sie in 36 Minuten 1,8 km zurücklegt?

226. In welcher Zeit kann ein Dampfschiff eine 96 km lange Strecke bei einer mittleren Geschwindigkeit von 8 m zurücklegen?

227. Die Entfernung der Erde von der Sonne beträgt annähernd 150 000 000 km, die Geschwindigkeit des Lichts 300 000 000 m. Wie lange würden wir noch Licht von der Sonne erhalten, wenn diese im gegenwärtigen Augenblick verlöschte?

228. a) Welche Strecke legt ein Radfahrer zurück, der anfangs 5 Minuten mit einer Geschwindigkeit von 8 m, danach 3 Minuten mit einer Geschwindigkeit von 9 m und 10 Minuten mit einer Geschwindigkeit von 10 m fährt?
b) Wie groß ist seine durchschnittliche Geschwindigkeit?

Hebel.

229. Die Arme eines zweiarmigen Hebels sind 8 cm und 9 cm lang. Am Endpunkte des kürzeren Arms hängt eine Last von 18 g. Wieviel g muß man an den Endpunkt des längeren Armes hängen, um das Gleichgewicht herzustellen?

230. An einem zweiarmigen Hebel halten sich zwei Kräfte von 16 kg und 12 kg das Gleichgewicht. Wie lang ist der Hebelarm der zweiten Kraft, wenn derjenige der ersten 0,6 m lang ist?

---

*) Meter in 1 Sekunde.

231. Zwei Kräfte von 80 g und 120 g wirken an einem einarmigen Hebel nach entgegengesetzten Richtungen und halten sich im Gleichgewicht. Wie groß muß der Hebelarm der ersten Kraft sein, wenn derjenige der letzteren a) 2 cm, b) 7 cm lang ist?

232. Zwei Kinder, die 20 kg und 30 kg schwer sind, schaukeln auf einem Balken. Das erste sitzt 3 m vom Stützpunkt des Balkens entfernt; wo das zweite?

233. Ein Gewicht von 33 kg wirkt am rechten Arm eines zweiarmigen Hebels, 3 m vom Unterstützungspunkt entfernt, während 9 kg am linken Arm in einem Abstande von 5 m vom Stützpunkt hängen. Wieviel kg müssen noch an letzterem in 4 m Entfernung vom Stützpunkt wirken, damit Gleichgewicht entsteht?

234. Am linken Arm eines doppelarmigen Hebels hängt ein Gewicht von 36 g, 9 cm von der Drehungsachse entfernt, während am rechten 18 g hängen, 8 cm von der Achse entfernt. Wo ist ein Gewicht von 15 g anzuhängen, wenn Gleichgewicht hergestellt werden soll?

235. Wie lang ist der kürzere Arm eines doppelarmigen Hebels, wenn er 1 m kürzer ist als der längere und zwei Kräfte von 15 kg und 12 kg sich das Gleichgewicht halten?

Rad an der Welle.

236. Welche Kraft hält an einer Winde einer 10 kg größeren Last das Gleichgewicht, wenn der Radius der Welle 1,2 m, der des Rades 1,5 m beträgt?

237. Eine Last von 200 kg und eine Kraft von 150 kg wirken an einer Winde. Wie groß ist der Durchmesser des Rades, wenn er 1 m mehr beträgt als der der Welle?

238. Welche Kraft hält eine Last von 60 kg im Gleichgewicht, wenn der Durchmesser der Welle 25 cm kürzer ist als die Kurbel, deren Länge 75 cm beträgt?

Schiefe Ebene.

(Ohne Berücksichtigung von Reibung.)

239. Die Länge einer schiefen Ebene beträgt 17 m, die Höhe 8 m. Wie groß muß die parallel der schiefen Ebene wirkende Kraft sein, die einen Körper von 204 kg Gewicht am Heruntergleiten auf der Ebene hindert?

240. Wie groß muß die parallel der Basis wirkende Kraft sein, die ein Gewicht von 360 kg im Gleichgewicht hält auf einer schiefen Ebene, deren Höhe 5 m, deren Basis 12 m mißt?

241. Die Länge (l) einer schiefen Ebene beträgt 25 m, die Basis (b) 24 m, die Höhe (h) 7 m. Welche Kraft ist erforderlich, um einen Körper, dessen Gewicht (a) 600 kg ist, im Gleichgewicht zu erhalten,
a) wenn die Kraft parallel der Länge der schiefen Ebene,
b) wenn sie parallel der Basis wirkt?

242. Dieselbe Aufgabe für

$$l = 41 \text{ cm}, \; b = 40 \text{ cm}, \; h = 9 \text{ cm}, \; a = 16{,}400 \text{ kg}.$$

243. Welche Zugkraft ist erforderlich, um einen Schlitten, der mit seiner Last 90 kg schwer ist, am Heruntergleiten von einem Bergabhang zu verhindern, dessen Steigung (d. h. das Verhältnis h : b) 1 : 10 beträgt?

244. Wie groß muß die Kraft sein, die auf einer Bahnstrecke von $\frac{1}{200}$ Steigung das Herablaufen eines Eisenbahnzuges im Gesamtgewicht von 80 000 kg hindert?

Fallgesetze.

245. Ein frei fallender Körper hat eine Beschleunigung von 9,81 m. Welche Geschwindigkeit hat er a) nach 5, b) nach 8 Sekunden?

246. Wie groß ist der Weg, den ein frei fallender Stein in 2 Sekunden durchläuft?

247. Wie hoch ist ein Turm, wenn ein Stein von dessen Spitze bis zum Erdboden 5 Sekunden fällt?

248. Wie tief liegt der Wasserspiegel eines Brunnens, wenn ein von seinem Rande aus fallender Körper nach 3 Sekunden das Wasser trifft?

249. Eine Kugel rollt eine schiefe Ebene hinab und hat von Beginn der Bewegung an einen Geschwindigkeitszuwachs von 4 m in jeder Sekunde. a) Welche Geschwindigkeit hat sie nach 8 Sekunden? b) Wie groß ist der durchlaufene Weg?

Gleichgewicht und Druck der Flüssigkeiten.

250. Ein würfelförmiges Gefäß, dessen eine Kante 20 cm beträgt, ist mit Wasser gefüllt. Wie groß ist der Druck auf den Boden?

251. Eine prismatische Flasche von 50 qcm innerer Bodenfläche ist bis zur Höhe von 15 cm mit Spiritus (spez. Gewicht 0,79) gefüllt. a) Welchen Druck erleidet die Bodenfläche? b) Wie groß würde der Bodendruck sein, wenn die Flasche mit Schwefelsäure (spez. Gew. 1,8) gefüllt wäre?

252. Der Boden eines rechtwinklig prismatischen Gefäßes hat 0,5 m und 0,4 m Seitenlänge. Wie hoch ist das Gefäß mit Wasser gefüllt, wenn der Bodendruck 60 kg beträgt?

Gleichgewicht zwischen tropfbar flüssigen und starren Körpern.

253. Wieviel wiegt ein vierseitiger prismatischer Marmorblock*) von $1\frac{1}{2}$ m Höhe, 80 cm Länge, 50 cm Breite?

254. Wie schwer ist eine Kugel aus Buchenholz (spez. Gew. 0,98) von 3 cm Radius?

255. Wie groß ist das Volumen von 236,25 g Silber?

256. Welchen Raum nehmen 54,27 kg Aluminium ein?

257. Eine Metallkugel von 8 kg Gewicht verdrängt 700 ccm Wasser. Wie groß ist ihr spezifisches Gewicht?

258. Ein Taler wiegt in der Luft 18 g, im Wasser annähernd 16,286 g. Wie groß ist sein spezifisches Gewicht?

259. Das absolute Gewicht eines Stückes Elfenbein beträgt 133 g, sein Volumen 70 ccm. Wie groß ist das spezifische Gewicht des Elfenbeins?

260. Wie groß ist der Gewichtsverlust einer eisernen Masse von 23,7 kg im Wasser?

261. Ein Marmorblock ist in der Luft 4 kg schwer. Welches Gewicht hat er im Wasser?

262. Ein Zwanzigmarkstück wiegt in der Luft annähernd 8 g. Wie schwer würde es im Wasser sein, wenn es aus reinem Golde bestände?

263. Welches Gewicht hat ein Körper von 320 ccm Rauminhalt, der beim Schwimmen um $\frac{1}{4}$ seines Volumens im Wasser eintaucht?

264. Ein schwimmender Körper von 45 cdm Rauminhalt taucht um $\frac{3}{5}$ seines Volumens im Wasser ein. Wie schwer ist er?

265. Wieviel kg wird jemand außerhalb des Wassers heben können, der im Wasser ein Felsstück von 15 cdm Rauminhalt und 2,4 spezifischem Gewicht heben kann?

266. Berechne das spezifische Gewicht einer Aluminiumbronze, die aus 90% Kupfer und 10% Aluminium besteht.

267. Die deutschen Kupfermünzen enthalten 95% Kupfer, 4% Zinn und 1% Zink. Wie groß ist das spezifische Gewicht der Legierung?

---

*) Für das spezifische Gewicht benutze man folgende Zahlen:

Gold 19,3	Kupfer 8,9	Zink 7,1
Blei 11,9	Eisen 7,9	Aluminium 2,7
Silber 10,5	Zinn 7,3	Marmor 2,7

268. Ein silberner Tafelaufsatz wird aus 315 g reinem Silber und 178 g Kupfer hergestellt. Wie groß ist das spezifische Gewicht der Legierung?

269. Welches ist das spezifische Gewicht einer goldenen Kette, die aus 38,6 g reinem Golde und einem Zusatz von 8,9 g Kupfer hergestellt wurde?

270. Zur Herstellung eines Kronleuchters aus Messing werden 8,9 kg Kupfer und 3,55 kg Zink verbraucht. Berechne das spezifische Gewicht des Messings.

271. Klempner nehmen zum Löten eine Mischung aus zwei Teilen Zinn und einem Teil Blei. Welches ist das spezifische Gewicht derselben?

272. Wieviel g Feinsilber sind mit 57,9 g reinem Golde zusammenzuschmelzen, damit die Legierung das spezifische Gewicht 14,9 erhält?

273. Wieviel kg Zinn müssen mit 35,6 kg Kupfer zusammengeschmolzen werden, um ein Glockenmetall vom spezifischen Gewicht 8,46 herzustellen?

274. Berechne das Gewicht eines Schwimmpanzers aus Kork vom spezifischen Gewicht 0,25, der einen Menschen von 72 kg absolutem Gewicht und vom spezifischen Gewicht 1,2 im Wasser trägt.

275. Wieviel Kork vom spezifischen Gewicht 0,24 muß ein Schwimmgürtel enthalten, um ein Kind, das 44 kg wiegt, im Wasser zu tragen? (Spez. Gew. des Menschen 1,1.)

Schall.

276. Der Knall eines Schusses wird 5 Sekunden später gehört, als das Aufblitzen des Geschützes durch Ferngläser beobachtet worden war. In welcher Entfernung befand sich das Geschütz? (Schallgeschwindigkeit 332 m.)

277. Wieviel Sekunden nach dem Abfeuern wird man den Geschützdonner einer 4,98 km entfernten Batterie hören?

278. Wie weit ist ein Gewitter entfernt, wenn zwischen dem Blitz und dem Beginn des Donners a) 30 Sekunden, b) 25 Sekunden vergehen?

Wärme.

279. Wieviel Grad zeigt ein Thermometer nach Celsius bei a) 12^0; b) 9^0; c) 20^0; d) — 15^0; e) — $10\frac{1}{2}{}^0$ Reaumur?

280. Wieviel betragen a) 10^0; b) — 22^0; c) $7\frac{1}{2}{}^0$; d) — 3^0; e) — $8\frac{1}{3}{}^0$ Celsius nach Reaumur?

281. Welche Temperatur zeigt ein Fahrenheitsches Thermometer a) bei 8^0; b) bei 20^0; c) — 12^0; d) — 16^0 Reaumur?

282. Wieviel Grad Fahrenheit entsprechen a) 15°; b) 35°; c) — 20°; d) — 10° Celsius?

283. Wieviel Grad Celsius und Reaumur sind a) 5°; b) 23°; c) 77°; d) — 22°; e) — 58° Fahrenheit?

284. Am 25. Juni 1909, bei einer Hitzwelle in den Vereinigten Staaten, zeigte das Thermometer in Newyork einen Höchststand von 100,04° Fahrenheit im Schatten. Wieviel Grad Celsius sind das?

285. Das Schnellot der Klempner schmilzt bei 144° Reaumur. Wieviel Grad Celsius und Fahrenheit sind das?

286. Meerwasser gefriert infolge seines Salzgehaltes erst bei — 2° Celsius. Bei wieviel Grad nach Reaumur und Fahrenheit?

287. Die normale Temperatur des menschlichen Körpers beträgt 37,5° C. Wieviel Grad Reaumur und Fahrenheit sind das?

288. Eine Glasröhre ist bei 0° C 0,5 m lang. Welche Länge hat dieselbe, bei 100° C? (Ausdehnungskoeffizient*) des Glases 0,000009.)

289. Ein eiserner Stab hat bei 0° C eine Länge von 2 m. Wie lang ist er bei 20° C, wenn der Ausdehnungskoeffizient 0,000012 ist?

Wärmemengen.

290. Wieviel Kalorien**) sind erforderlich, 1) um a kg Wasser von 0° um b° C zu erwärmen? 2) um 5 kg Wasser von 10° C auf 25° C zu erwärmen?

291. a_1 kg von t_1^0 C werden mit a_2 kg von t_2^0 C gemischt. Welche Temperatur hat die Mischung?

292. 5 kg Wasser von 12° C werden mit 9 kg von 14° C gemischt. Wie hoch ist die Temperatur der Mischung?

293. Welche Temperatur hat eine Mischung von 12 kg Wasser von 16° C und 20 kg Wasser von 24° C?

294. Zu 4 kg Wasser von 15° C werden 10 kg von 36° C gegossen. Wie hoch ist die Temperatur der Mischung?

295. Wieviel kg Wasser von t_1^0 C muß man mit a kg von t_2^0 C mischen, damit die Temperatur der Mischung t° C beträgt?

296. Zu 12 kg Wasser von 25° C gießt jemand Wasser von 74° C hinzu, um Wasser von 46° C zu erhalten. Wieviel kg muß er nehmen?

---

*) Als Ausdehnungskoeffizienten bezeichnet man den Zuwachs, den die Längeneinheit eines Stabes erfährt, wenn man ihn um 1° C erwärmt.

**) Unter Kalorie versteht man die Wärmemenge, die 1 kg Wasser um 1° C erwärmt. (Die gleichzeitige Erwärmung des Gefäßes ist in Aufg. 290 ff. unberücksichtigt zu lassen.)

297. Welche Temperatur haben 15 kg Wasser, wenn sie, mit 10 kg von 24° C zusammengegossen, Wasser von 15° ergeben?

298. Zu 30 kg Wasser von 10° C wird Wasser von 34° C zugegossen. Die Mischung ist 16° warm. Wieviel Wasser wurde hinzugegossen?

Schmelzwärme*)

299. 2 kg Eis von 0° sind mit 6 kg siedendem Wasser übergossen worden. Welche Temperatur hat das Wasser, das man erhält?

300. Welche Temperatur hat das Wasser, das sich ergibt, wenn man 17 kg von 60° C über 8 kg Eis von 0° gießt?

301. Wieviel kg Schnee von 0° muß man in 11 kg Wasser von 80° schmelzen, wenn die Mischung eine Temperatur von 30° haben soll?

302. Welche Temperatur müssen 20 kg Wasser haben, die 5 kg Eis von 0° schmelzen und die Mischung auf eine Temperatur von 32° bringen sollen?

Licht.

303. a) Wie hoch ist ein Baum, dessen Schattenlänge s m beträgt, wenn der Schatten eines daneben stehenden Stabes von h m Länge l m beträgt?

b) Die Höhe des Baumes zu bestimmen für:

1) $s = 4$ m; $h = 3$ m; $l = 1{,}5$ m;

2) $s = 3{,}2$ m; $h = 3$ m; $l = 1$ m.

304. Der Schatten eines senkrecht in die Erde gesteckten h m langen Stabes beträgt l m.

a) Wie lang ist der Schatten eines a m hohen Turmes?

b) Die Schattenlänge des Turmes zu bestimmen für:

1) $a = 24$ m; $l = 20$ cm; $h = 80$ cm;

2) $a = 45$ m; $l = \frac{1}{2}$ m; $h = 2\frac{1}{2}$ m.

305. Wievielmal vergrößert**) wird ein Gegenstand durch eine Lupe von 4 cm Brennweite:

1) für Menschen mit normalen Augen (d. i. mit 25 cm Sehweite),
2) für weitsichtige Augen von 40 cm Sehweite,
3) für Kurzsichtige von 12 cm Sehweite?

---

*) Als Schmelzwärme für 1 kg Eis und Schnee von 0° sind hier 80 Kalorien gerechnet worden.

**) $\text{Vergrößerung} = \frac{\text{Sehweite}}{\text{Brennweite}} + 1.$

306. Welches ist die Brennweite einer Lupe, die für ein kurzsichtiges Auge von 18 cm Sehweite eine 6fache Vergrößerung erzeugt?

307. Berechne die Sehweite eines Auges, für das eine Lupe von 5 cm Brennweite 11mal vergrößert?

Luftdruck.

308. Wie groß ist bei einem Barometerstande von 760 mm der Luftdruck:
a) auf 5 qcm?
b) auf einen quadratischen Tisch von 1,5 m Seitenlänge?
c) auf die Oberfläche eines kreisrunden Tisches von $\frac{3}{4}$ m Radius?

---

g) Vermischte Aufgaben.

309. Während einer Ferienreise in der Schweiz und Tirol erhielt Anna von ihren Freundinnen aus Deutschland 39 Ansichtspostkarten. Wieviele derselben waren nach der Schweiz, wieviele nach Tirol gesandt, wenn das Gesamtporto für die Karten 2,05 ℳ betrug?

310. A gab B auf zu berechnen, wieviel Geld er in der Tasche habe. „Subtrahiere ich von der Summe 1,40 ℳ", sagte er, „dividiere die Differenz durch 2, addiere 3,50 ℳ und multipliziere die Summe mit 4, so erhalte ich 22 ℳ." Wieviel Geld hatte er bei sich?

311. „Einer fragt, wie lang die Sonn hab geschienen denselbigen tag. Der Tag ist yetzt 15 stund lang. So du nu die vergangne zeyt dieses tags diuidierest mit der vbrigen zeyt dieses tags / so wirstu finden jm Quotient $1\frac{1}{2}$". (Rudolff.)

312. „Es geht einer für etlich Junckfrawen / Spricht. Gott grüß euch alle zehen. Antwort eine. Weren vnser noch so vil / vnd ein dritteyl so vil weniger zwo, so weren vnser gleych so vil vnder 20 als vnser sind vnder 10. Wie vil sinds?" (Rudolff.)

313. In einem Eisenbahnzuge fahren $\frac{1}{9}$ der Reisenden erster Klasse, $\frac{2}{15}$ zweiter Klasse, $\frac{1}{4}$ dritter Klasse, während 19 mehr als $\frac{2}{5}$ aller Reisenden in der 4. Klasse befördert wurden. Mit wieviel Personen war der Zug besetzt?

314. Welches ist die mittlere Volksdichte Nordamerikas, wenn sie sich zu derjenigen Europas, wo durchschnittlich auf 1 qkm 40 Menschen leben, wie 7 : 80 verhält?

315. Die Einwohnerzahl eines Ortes, die seit der letzten Zählung um $8\frac{1}{2}$% gestiegen ist, beträgt 19530. Wie groß war dieselbe bei jener Zählung?

316. Für eine Seidenfirma ist auf dem Berliner Zollamt ein Ballen seidener Gewebe aus Paris angekommen, für den 186 ℳ Zoll zu entrichten sind. Die Sendung enthält seidene Stickereien zum Zollsatze von 1200 ℳ und halbseidene Gewebe zum Zollsatze von 500 ℳ für den Doppelzentner. Wieviel kg jeder Art hat die Firma bestellt, wenn der Ballen 10 kg Seide weniger enthält als Halbseide?

317. In einer Schule von 10 Klassen und 320 Schülerinnen haben die 7., 6. und 5. Klasse je 3 Schülerinnen mehr, die 4. Klasse 5 Schülerinnen weniger als jede der drei unteren Klassen. In der 3. und 2. Klasse sind je 6 Schülerinnen mehr, in der ersten 4 mehr als in der 9. Klasse. Wieviel Schülerinnen sind in der 1. Klasse?

318. Drei Schreiber sollen 339 Bogen abschreiben. Der erste schreibt täglich durchschnittlich 10 Bogen, der zweite $9\frac{1}{2}$ Bogen, der dritte $8\frac{3}{4}$ Bogen. Wieviel Tage haben alle drei zusammen daran zu tun?

319. Wieviel Schafe hast du, fragte A, der 55 Schafe besaß, den B. Dieser antwortete: Gäbe ich dir den 5ten und den 6ten Teil meiner Schafe, dann besäßest du nur 23 mehr als mir geblieben wären. Wieviel Schafe hatte B?

320. Ein Berliner Weinhaus hat für 60 Körbe Schaumwein aus Reims, von denen jeder 45 kg schwer ist, 315,90 ℳ Zoll zu entrichten. Die Tara beträgt 10%. Wie hoch ist der Zoll für 100 kg Reingewicht?

321. In einem Teich ist ein Pfosten eingerammt, der mit dem 4. Teile seiner ganzen Länge in der Erde, mit $\frac{1}{5}$ seiner Länge im Wasser steht und sich 1,10 m über dasselbe erhebt. Wie lang ist der Pfosten?

322. Der römische Schriftsteller Vitruv erzählt, daß die Krone des Königs Hiero von Syrakus in der Luft 20 Pfund, im Wasser $18\frac{3}{4}$ Pfund gewogen habe. Wieviel Gold und wieviel Silber mußte die Krone enthalten, wenn sie nur aus diesen beiden Metallen bestand? (Benutze für das spezifische Gewicht des Goldes die Zahl 19, des Silbers die Zahl 10).

323. *)„Was an Jahren gelebt der Demochares, davon das Viertel
Brachte als Knabe er zu, ein Fünftel als Jüngling, und Mann drauf
War er das Drittel der Zeit. Wie das greisige Alter daherkam,
Lebt' er noch dreizehn Jahr', und erreicht war die Schwelle des Lebens!"

---

*) Nr. 323 bis 328 sind aus den arithmetischen Epigrammen der griechischen Anthologie. Vgl. Anm 2. S. 96.

324. „Hier dies Grabmal deckt Diophantos*) — ein Wunder zu schauen —:
Durch arithmetische Kunst lehret sein Alter sein Stein.
Knabe zu bleiben verlieh ein Sechstel des Lebens ein Gott ihm;
Fügend das Zwölftel hinzu, ließ er ihm sprossen die Wang'.
Steckte ihm drauf auch an in dem Siebtel die Fackel der Hochzeit,
Und fünf Jahre nachher teilt er ein Söhnlein ihm zu.
Weh! unglückliches Kind, so geliebt! Halb hat es des Vaters
Alter erreicht, da nahm's Hades, der schaurige, auf.
Noch vier Jahre den Schmerz durch Kunde der Zahlen besänft'gend,
Langte am Ziele des Seins endlich er selber auch an."

325. „Nimm von der silbernen Schal', o Schmid, ein Drittel und Viertel,
Auch ein Zwölftel dazu: wirf mir das alles zuhauf;
Bring das Metall zum Ofen und rühre die Masse gehörig;
Zieh mir den Klumpen heraus, Minen**) — nur ein' an Gewicht."

326. „Zu Augeias die gewaltige Kraft des Alkiden
Sprach, ausforschend der Rinder Gesamtzahl. Jener entgegnet:
Rings um die Flut des Alpheios herum, Freund, weidet die Hälfte;
Aber das Achtel der Herd' am Hügel, geweihet dem Kronos;
Am Taraxippos sodann ein Zwölftel, fern an der Grenze;
Auch ein Zwanzigstel grast im altehrwürdigen Elis;
Aber den dreißigsten Teil rundum in Arkadien ließ ich;
Was nun übrig der Herd', schaust hier du: die Hälfte von hundert"

327. „Wo doch verblieben die Äpfel dir, Kind? Zwei Sechstel besitzt
Ino; das Achtel jedoch teilte sich Semele zu.
Drauf Autonoe raubt ein Viertel; das Fünftel Agaue
Riß aus dem Schoße mir weg, machte sich stracks auch davon.
Dir ja bewahre ich auf 10 Äpfel; dagegen für mich noch
Wahrlich! bei Kypris ich schwör's, bleibet der einzige hier."

328. „Mächtig mit Nüssen beschwert, dort prangte der herrliche Nußbaum;
Ihn hat einer gefällt jetzt plötzlich. Jedoch was erzählt er?
Höre! es nahm von den Nüssen das Fünftel mir Parthenopeia;
Aber Philinna ergriff ein Achtel; drauf Aganippe
Faßte das Viertel; es freut Oreithya sodann sich des Siebtels;
Doch Eurynane pflückt' ein Sechstel sich ab von den Nüssen;
Doch ein Hundert und sechs sich die Chariten teilten gemeinsam;
Neun mal neun zuletzt abbrachen die Musen; die sieben
Übrigen hangen du siehst fernhin an den Spitzen der Äste."

---

*) Diophantos von Alexandrien, 4. Jahrh. n. Chr. **) Vgl. S. 96 Anm. 1.

XII. Gleichungen ersten Grades mit mehreren Unbekannten.

§ 30.

Gleichungen mit zwei Unbekannten.

Die folgenden Aufgaben sind graphisch und rechnerisch zu lösen.*)

1. $x + y = 5$, $y = 2$.
2. $x - y = 2$, $y = 7$.
3. $2x + 3y = 11$, $y = 3$.

4. $4x + 5y = 32$, $x = 3$.
5. $5x + 3y = 8$, $y = -3x$.
6. $7x - 13y = 50$, $x - y = 8$.

7. $x = 8 - y$, $x = 2 + y$.
8. $x = 16 - 2y$, $x = 25 - 5y$.
9. $-y = 15 - 9x$, $-y = 7 - 5x$.

10. $5y = -3x + 1$, $5y = -6x - 8$.
11. $7x - 3y = 61$, $7x - 5y = 69$.
12. $8x - 3y = 7$, $7y + 8x = 37$.

13. $x + y = 7$, $x - y = 3$.
14. $x + 3y = 1$, $x - 3y = 7$.
15. $15y - 8x = -11$, $15y - 4x = 17$.

16. $5x - 3y = 1$, $5x + 3y = 19$.
17. $6x + y = 4$, $2x - 3y = 8$.
18. $4x + 7y = 27$, $8x - 5y = -41$.

Die folgenden Gleichungen sind in erster Linie durch Rechnung zu lösen:

19. $x + y = 434$, $x - y = 266$.
20. $x - y = 65$, $x + y = 107$.
21. $x - 5y = 10$, $x - 12y = -4$.

22. $y - 2x = -3$, $y - 3x = -9$.
23. $2x + y = 14$, $y - x = -1$.
24. $13y - 9x = 7$, $13y - 11x = -3$.

25. $8x + 3y = 27$, $8x - 9y = -15$.
26. $5x - y = 110$, $3x - y = 60$.
27. $x + 3y = 11$, $x + 2y = 9$.

28. $8x - 5y = 76$, $9x + 4y = 47$.
29. $9x - y = 15$, $5x - y = 7$.
30. $3x + 11y = 206$, $11y - 7x = -4$.

31. $2y + 25x = 79$, $5x - 11y = -7$.
32. $3x + 5y = 19$, $6x + y = 20$.

33. $12x - 3y = 53$, $5x + 9y = 5$.
34. $15x + 7y = 58$, $29y - 45x = 26$.

---

*) Die Aufgaben Nr. 1 bis 6 eignen sich als Beispiele zur Substitutionsmethode, Nr. 7 bis 12 zur Kombinationsmethode, Nr 13 bis 18 zur Koeffizientenmethode.

35. $16x - 5y = 53$
$15y - 4x = -27.$

36. $5x + 21y = 85$
$4x - 3y = -31.$

37. $2x + 4y = 23$
$10x + 7y = 37.$

38. $9x - 8y = 106$
$16y + 19x = 47.$

39. $5(4x - 1) - 2(3y + 2) = 13$
$4(3x + 2y) - 3(7 - y) = 36.$

40. $5(x - 4) - 2(y + 15) = -33$
$9y + 8x - 3(7y - 1) = -93.$

41. $6x - 4(3x + 2) - y + 27 = 3(x + y + 5) - 2(x + y)$
$9(3y - 8) - 11(2x + 5y + 6) + 400 = 7(7y - 11) - 112.$

42. $y(2x + 7) - x(3 + 2y) = 31$
$5(y + 1) - 3(2x - 3) = 13.$

43. $(3x + 1)y - (3y + 5)x = -19$
$(2x + 3)(5y - 1)2 - (5x + 1)(4y - 3) = 67.$*)

---

44. $0{,}2x + 0{,}3y = 6{,}5$
$0{,}1x - 0{,}6y = -8.$

45. $4{,}5x + 4y = 110$
$1{,}5x - 4y = 10.$

46. $1{,}2x + 3{,}5y = 0{,}59$
$2{,}4x - 0{,}08y = 0$

47. $3{,}7x + 2{,}5y = 8{,}7$
$5y - 7{,}6x = 2{,}4.$

48. $26{,}5x - 12{,}2y = 30{,}7$
$0{,}51x + 6{,}13y = 26{,}05$

49. $10{,}6y + 3{,}15x = 3{,}81$
$12{,}5x - 6{,}3y = 0{,}61$

50. $3{,}5x + 2{,}7y - 2{,}1x - 16{,}3 = 0$
$6{,}8y - 2{,}2x - 0{,}7y - 26{,}1 = 0$

51. $\frac{x}{3} + 5y = 125$
$\frac{x}{3} - 2y = -22.$

52. $7x + \frac{y}{4} = 94$
$12x + \frac{y}{4} = 159.$

53. $\frac{2x}{5} - \frac{3y}{4} = 11$
$\frac{3x}{10} - \frac{3y}{4} = 3$

54. $\frac{7x}{9} + \frac{20}{y} = 39$
$\frac{25}{y} - \frac{7x}{9} = -30.$

55. $\frac{5x}{8} - \frac{y}{4} = 1\frac{1}{8}$
$\frac{y}{4} - \frac{7x}{3} = -9\frac{2}{3}.$

56. $\frac{7y + 2x}{4} - \frac{5y - x}{3} = 1$
$\frac{x + 2}{5} + \frac{14x + 5y}{10} = 3.$

---

*) Siehe die Gleichungen § 26, Nr. 128 bis 132.

57. $\frac{x+3}{20} + \frac{y-4}{2} = \frac{3}{4}$
$\frac{4x-y}{6} - \frac{3x-1}{20} = \frac{1}{4}.$

58. $\frac{2x-y}{5} = \frac{y+2}{3} + 2$
$\frac{5x-2y}{2} - 15 = \frac{3x+4y}{4}.$

---

59. $x + y = 4a$
$x - y = 2a.$

60. $x + y = 4a + 3b$
$x - y = 2a + b.$

61. $x + y = 4a$
$x - y = 4b.$

62. $x - y = 5a + 3b$
$x + y = 3a + 2b.$

63. $ax + y = m$
$cx + y = n.$

64. $bx + y = a$
$dx + y = b.$

65. $x + ay = a^2$
$x - by = b^2.$

66. $3x - 2y = 5a$
$2x - 3y = 5b.$

67. $5x + 6y = 16a$
$8x - 5y = 11a.$

68. $9x - 7y = 32p$
$7x - 9y = 32q.$

69. $9x - 11y = -28c$
$12x - 5y = 11c.$

70. $6x + 5y = 11a + b$
$2x + 7y = 9a - 5b.$

71. $x + 3y = 2(2a + b)$
$5y - 3x = 2(a + 4b).$

72. $x(a + b) - ay = a + b$
$x(a - b) + by = a - b.$

73. $(a - b)x + (a + b)y = 2(a^2 - b^2)$
$(a + b)x - (a - b)y = 4ab.$

74. $(a + b)x - ay = a^2$
$bx - (a - b)y = b^2.$

75. $(a + b)x + (a - b)y = 2a$
$(a + b)^2x - (a - b)^2y = 0.$

76. $a^2b^2x - ay = ab$
$x + ay = \frac{1}{ab}.$

77. $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} = 2$
$\frac{a^2}{x} - \frac{b^2}{y} = a - b.$

78. $\frac{a^2-b^2}{x} + \frac{a^2-b^2}{y} = 2a$
$\frac{a^2-b^2}{x} - \frac{a^2-b^2}{y} = -2b.$

79. $\frac{x}{a+b} - \frac{y}{a-b} = \frac{1}{a+b}$
$\frac{ax}{a+b} + \frac{by}{a-b} = \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}.$

80. $\frac{x}{a^2-b^2} - \frac{y}{a+b} = 0$
$\frac{x}{a-b} + \frac{y}{a+b} = a + b + 1.$

81. $\frac{x + y + 1}{x - y - 1} = \frac{2a + 1}{2c - 1}$
$\frac{x - y + a}{x + y - a} = \frac{2c + a}{a}$.

82. $\frac{x - y + ab}{x + y - ab} = \frac{b}{a}$
$\frac{y - x - ab}{y + x + ab} = -\frac{b}{a + b}$.

---

§ 31.

Gleichungen mit mehr als zwei Unbekannten.

1. $x + y = 8$
$x + z = 13$
$y + z = 17$.

2. $x + y = 7$
$y + z = 14$
$x + z = 11$.

3. $3x + 4y = 18$
$2x + 3z = 19$
$2y + z = 11$.

4. $x + y = 17$
$5x + 2z = 67$
$4y + z = 56$.

5. $3x - y = 11$
$7y + 5z = 33$
$8z - 7x = -27$.

6. $x + y + z = 90$
$2y = 3x$
$3z = 4y$.

7. $x + y - z = 55$
$5y = 6z$
$2z = x$.

8. $x - y + 2z = 7$
$5x = 4y$
$2x = z$.

9. $x + 3y - z = 22$
$8x = 7y$.
$9y = 8z$.

10. $2x + 3y - z = 34$
$x = 2(z - y)$
$z = x + 7$.

11. $x + 3y - 2z = 35$
$x = z - 9$
$3y = 2z + 13$.

12. $2x + 3y + 4z = 53$
$y = 5(9 - z)$
$z = 35 - 9x$.

13. $5x + 2y + 3z = 28$
$3x + 5y + 2z = 29$
$2x + 3y + 5z = 33$.

14. $x + 4y + 7z = 89$
$4x + 7y + z = 77$
$7x + y + 4z = 74$.

15. $4x + 3y + 2z = 80$
$6x + 3y - 4z = 0$
$2y + z - 7x = 0$.

16. $8x + 5y - 7z = 73$
$15x - 13y + 9z = 25$
$11x + 17y - 5z = 151$

17. $31y = 5(24 + 3z - 4x)$
$19y = 31 - 37z + 13x$
$3y = 3 - 12z + 5x$.

18. $3x = 2y + z + 9$
$5x = 7y - 2z + 26$
$8x = 5y + 9z - 7$.

19. $5(2x - y) + 3(2y - 5z) = 4$
$4x + 3y - 3(y + 7z) = -30$
$3(3x + 2y) - 4(4z - 5y) = 99$

20. $4(x + y) + 3(y + z) = 5(x + 9)$
$7(x - 2y) - 5(3x - 2z) = 8(y - 9)$
$2(4z - y) - 8(x + 2y) = 7z - 79$

21. $1,5x + 2,2y = 9,6$
$2,5y + 3,2z = 23,5$
$3,1z + 2,4x = 20,3.$

22. $0,4y = 0,3x - 0,3$
$0,7y = 1,6z - 3,2$
$1,2y = 0,5(1 - x).$

23. $0,5x = 0,2y + 0,1z - 0,2$
$0,3x = 0,1y + 0,2z - 0,5$
$0,2x = 0,3y - 0,5z + 1,1$

24. $2,1z = 0,4x - 0,3y + 0,1$
$1,3z = 0,2x + 0,3y - 1,3$
$0,5z = 0,1x - 0,2y + 0,4.$

25. $\frac{x}{3} + \frac{y}{5} = 7$
$\frac{y}{3} + \frac{z}{8} = 8$
$\frac{x}{2} + \frac{z}{3} = 14.$

26. $\frac{x}{3} - \frac{y}{6} = 1$
$\frac{y}{4} + \frac{z}{8} = 5$
$\frac{z}{2} + \frac{x}{3} = 11.$

27. $\frac{x}{2} - \frac{y}{6} = 5$
$\frac{x}{2} + \frac{z}{5} = 20$
$\frac{y}{3} - \frac{z}{5} = 0.$

28. $\frac{3x}{8} + \frac{2y}{9} = 5$
$\frac{7x}{4} - \frac{5z}{12} = 9$
$\frac{5y}{9} - \frac{z}{2} = -1.$

29. $\frac{x}{12} + \frac{y}{15} + \frac{z}{18} = 25$
$\frac{x}{10} + \frac{y}{6} + \frac{z}{9} = 47$
$\frac{x}{6} - \frac{y}{3} + \frac{z}{2} = 15$

30. $\frac{2x}{5} + \frac{3y}{16} - \frac{z}{8} = 10$
$\frac{x}{5} - \frac{y}{8} + \frac{z}{8} = 7$
$\frac{y}{2} - \frac{4x}{5} + \frac{z}{12} = 0.$

31. $\frac{x + y}{z + 2} = 1$
$\frac{z - x}{y + 1} = \frac{1}{2}$
$\frac{2(y + 1)}{3x - 1} = 1\frac{1}{2}$

32. $\frac{2(x + 2)}{y + 5} = 1\frac{1}{5}$
$\frac{3y - 2}{x + 7} = 2$
$\frac{z + y}{x + 3} = 2\frac{1}{2}$

33. $x + y = a$
$y + z = b$
$z + x = c.$

34. $x + y + z = n$
$x - y + z = q$
$y + z - x = -m.$

35. $x - y + z = n + q$
$z - x + y = q - n$
$x + y - z = m - q.$

36. $ax - by = a^2 - b^2$
$ax + 2z + by = (a + b)^2$
$z = ay.$

37. $(a + b)z - ax - by = 2ab$
$ax - (a - b)z = by$
$ax - by = (a - b)z.$

38. $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 2$
$\frac{z}{c} - \frac{y}{b} = 0$
$\frac{x}{a} + \frac{2y}{b} = \frac{3z}{c}$

---

39. $x + 2y = 5$
$y + 2z = 8$
$z + 2u = 11$
$u + 2x = 6$

40. $4x - y = 7$
$4y - z = 14$
$4z - u = 16$
$4u - x = 29$

41. $2x + 3y = 19$
$4y + z = 26$
$3z - 2u = -2$
$5u - 7x = 36$

42. $x + y + z = 9$
$y + z + u = 10$
$u - x + y = 4$
$z - u + x = 1$

43. $4x + 3y + 2z = 28$
$4y + 3z + 2u = 35$
$5u + 4x - z = 37$
$7u - 6y - 3x = 21$

44. $x + y - z - u = 6$
$y + z + u - x = 4$
$z - u - x + y = -2$
$u + x - y + z = 10$

45. $3x - 2y + 5z - u = 44$
$5y + 8x - 2z + 3u = -30$
$3z - 4u + 5x - y = 56$
$5u + 10x - 7y + 9z = 51$

46. $x + y = a$
$y + z = b$
$z - u = c$
$u + x = d$

47. $x + y + z + u = 10a$
$x - y + z + u = 6a$
$x - y - z + u = 0$
$x - y + z - u = -2a$

XIII. Anwendungen der Gleichungen ersten Grades mit mehreren Unbekannten.

§ 32.

Gleichungen mit zwei Unbekannten.

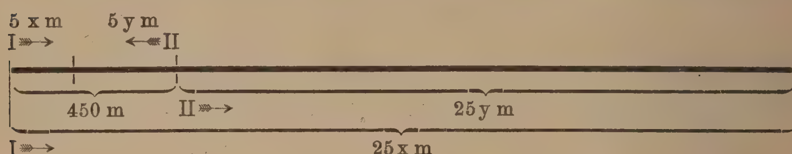
A) Gleichungen einfachster Art.

1. Wie heißen die beiden Zahlen, deren Summe 1176, deren Differenz 474 beträgt?
2. Die Summe zweier Zahlen ist $12\frac{1}{6}$, ihre Differenz $5\frac{1}{6}$. Welches sind die Zahlen?

3. Zwei Zahlen zu finden, deren Summe = a, deren Differenz = b ist.
4. Die Differenz zweier Zahlen, welche sich wie 7 : 5 verhalten, beträgt 30. Wie heißen die Zahlen?
5. Zwei Zahlen verhalten sich wie 4 : 5. Vermehrt man die erste um 3, die zweite um 5, so verhalten sich die entstandenen Zahlen wie 3 : 4. Wie heißen die ursprünglichen Zahlen?
6. Die Differenz zweier Zahlen ist a. Ihre Summe ist dreimal so groß wie die Differenz. Welches sind die Zahlen?
7. Multipliziert man die erste von 2 Zahlen mit 4, die zweite mit 9, so beträgt ihre Summe 83. Multipliziert man dagegen die erste mit 12 und die zweite mit 5, so beträgt ihre Differenz 25. Wie heißen die beiden Zahlen?
8. Zwei Zahlen verhalten sich wie 5 : 21. Dividiert man die erste durch 10, die zweite durch 2, so ergibt die Summe der Quotienten 44. Welches sind die Zahlen?
9. Zwei Zahlen, welche sich wie m : n verhalten, haben die Differenz a Welches sind die Zahlen?
10. Zwei Zahlen zu finden, deren Summe = 2, deren Quotient = 4 ist.
11. Zwei Schneiderinnen und fünf Näherinnen verdienen zusammen täglich 13 ℳ; fünf Schneiderinnen und zwei Näherinnen verdienen 16,75 ℳ Wieviel erhält jede Näherin täglich?
12. 3 kg Tee und 5 kg Kaffee kosten zusammen 37 ℳ; 5 kg Tee und 3 kg Kaffee kosten zusammen 44,60 ℳ. Wie teuer ist ein kg jeder Sorte?
13. Für 4 l Milch und 7 l Bier waren zusammen 3,25 ℳ bezahlt. Wie teuer ist ein l jeder Art, wenn 7 l Milch ebenso viel kosten wie 4 l Bier?
14. A hat doppelt so viel Geld bei sich wie B. Gibt A dem B 4,50 ℳ, so haben beide gleich viel. Wieviel hatte jeder?
15. Zwei Stücke Stoff enthalten zusammen 112 m. Verkauft man von dem ersten 14 m, von dem zweiten 10 m, so verhalten sich die Reste wie 7 : 4. Wieviel m enthält jedes Stück?
16. Von zwei Zuflußröhren, die in 10 Minuten zusammen 270 l Wasser liefern, liefert die erste in 8 Minuten 9 l Wasser weniger als die zweite in 7 Minuten. Wieviel l Wasser fließen durch jede Röhre?
17. Im preußischen Abgeordnetenhause wurde ein Antrag, bei dem 386 Stimmen abgegeben wurden, mit einer Mehrheit von 134 Stimmen angenommen. Wieviel Abgeordnete hatten für, wieviel gegen den Antrag gestimmt?

18. A und B besitzen verschieden große Kapitalien. Wenn B 1000 ℳ gewönne und A 1000 ℳ verlöre, so würden beide dieselbe Summe besitzen. Gewönne A 3000 ℳ und verlöre B 1000 ℳ, so würde das Kapital des A dreimal so groß sein wie das des B. Wieviel besitzen A und B?

19. Zwei Körper I und II sind 450 m voneinander entfernt. Bewegen sie sich einander entgegen, so treffen sie sich nach 5 Minuten; bewegen sie



sich hintereinander her, so holt der erste den zweiten nach 25 Minuten ein. Wieviel m legt jeder Körper in einer Minute zurück?

20. Jemand hat zwei Kassen. Nimmt er 16 ℳ aus der ersten und legt sie in die zweite, so enthalten beide dieselbe Summe. Legt er 16 ℳ aus der zweiten in die erste, so enthält die erste Kasse doppelt so viel wie die zweite. Wieviel war anfangs in jeder Kasse?

21. Jemand kauft 2 Sorten Tuch. Nimmt er 12 m von der ersten und 20 m von der zweiten Sorte, so hat er 140 ℳ zu bezahlen. Kauft er dagegen 20 m von der ersten und 12 m von der zweiten Sorte, so muß er 148 ℳ bezahlen. Wie teuer ist ein Meter jeder Sorte?

22. Geht ein Mann 25 Tage, seine Frau 20 Tage auf Arbeit, so verdienen sie zusammen 125 ℳ. Geht der Mann 20 Tage, die Frau 25 Tage auf Arbeit, so verdienen sie zusammen 122,50 ℳ. Wie groß ist der tägliche Arbeitslohn der Frau?

23. Ein Wasserbehälter hat zwei Zuflußröhren. Ist die erste 4 Minuten, die zweite 5 Minuten geöffnet, so fließen 164 l ein. Ist hingegen die erste 9 Minuten und die zweite 10 Minuten geöffnet, so fließen 344 l ein. Wieviel l Wasser liefert jede Röhre in der Minute?

24. Der fünfte Teil einer Zahl ist um 4 größer als der siebente Teil einer anderen Zahl. Die Summe aus dem achten Teil der ersten und dem vierten Teil der zweiten Zahl beträgt 12. Wie heißen die Zahlen?

25. Ein Kaufmann hat 2 Sorten Tee in verschiedenen Mengen eingekauft. Verkauft er $\frac{1}{5}$ der ersten Sorte und $\frac{2}{7}$ der zweiten Sorte, so hat er 46 kg verkauft. Verkauft er $\frac{3}{8}$ der ersten Sorte und $\frac{1}{3}$ der zweiten, so hat er 65 kg verkauft. Wieviel kg jeder Sorte hat er eingekauft?

26. Ein Vater war vor einem Jahr dreimal so alt wie sein Sohn und vor 9 Jahren fünfmal so alt wie dieser. Wie alt ist jetzt jeder von ihnen?

27. Wenn das erste von zwei Kapitalien zu 5%, das zweite zu 4% ausgeliehen ist, so betragen die jährlichen Zinsen zusammen 762 ℳ. Würde man die Prozentsätze mit einander vertauschen, so betrügen die Zinsen nur 745,50 ℳ. Wie groß ist jedes der Kapitalien?

28. Zwei Röhren füllen zusammen einen Teich in $6\frac{1}{2}$ Stunden. In welcher Zeit würde eine jede der Röhren den Teich füllen, wenn die erste in der Minute dreimal so viel Wasser liefert wie die zweite?

29. Die jährlichen Zinsen eines Kapitals betragen a ℳ. Wäre dasselbe um c ℳ größer, so würde es b ℳ Zinsen bringen. Wie groß ist das Kapital, und zu wieviel Prozent ist es ausgeliehen?

30. Eine Rechnung über 50 Flaschen Weißwein und 60 Flaschen Rotwein beläuft sich auf 230 ℳ; eine andere über 100 Flaschen Weißwein und 50 Flaschen Rotwein auf 285 ℳ. Wie teuer wird eine Flasche Weißwein und wie teuer eine Flasche Rotwein berechnet?

31. „Zwei Minen* her! so besitz' ich doppelt deine Zahl.
Dir zwei entnehmend gelt' ich viermal soviel wie du*)."

B) Gleichungen, nach Sachgebieten geordnet.

a) Zahlbestimmungen.

32. Vermehrt man den Zähler eines Bruches um 3 und vermindert den Nenner um 2, so erhält man 3. Vermehrt man den Zähler um 7 und den Nenner um 1, so erhält man 2. Wie heißt der Bruch?

33. Vermehrt man den Zähler eines Bruches um a und den Nenner um b, so hat der entstandene Bruch den Wert $\frac{a}{b}$. Vermindert man den Zähler um a und den Nenner um b, so wird der Wert des Bruches $= 0$. Wie heißt der Bruch?

34. Subtrahiert man vom Zähler eines Bruches 6, vom Nenner 4, so erhält der Bruch den Wert $\frac{2}{3}$. Addiert man zum Zähler 3, zum Nenner 7, so erhält er den Wert $\frac{3}{4}$. Wie heißt der Bruch?

35. Welcher Bruch erhält den Wert $\frac{3}{7}$, wenn man Zähler und Nenner um 5 vermindert, und den Wert $\frac{5}{9}$, wenn man Zähler und Nenner um 5 vermehrt?

---

*) Aus den Epigrammen der griechischen Anthologie. Vgl. S. 96, Anm. 1 u. 2.

36. Subtrahiert man b vom Zähler eines Bruches und addiert zum Nenner b, so erhält der entstandene Bruch den Wert 1. Subtrahiert man dagegen den Zähler von a und addiert zum Nenner b, so wird der Bruch $= -\frac{b}{a}$. Wie heißt der Bruch?

37. Die Differenz der Quadrate zweier Zahlen beträgt 72. Wäre jede der beiden Zahlen um 2 kleiner, so würde die Differenz der Quadrate 56 betragen. Wie heißen die Zahlen?

38. Die Differenz zweier Zahlen ist $= a$, die Differenz ihrer Quadrate $= b$. Welches sind die Zahlen?

39. Man erhält 99, wenn man zu einer zweistelligen Zahl die Zahl addiert, welche dieselben Ziffern in umgekehrter Folge enthält. Die ursprüngliche Zahl ist 6 mal so groß wie ihre Quersumme. Wie heißt die Zahl?

40. Subtrahiert man von einer zweiziffrigen Zahl die Zahl, welche dieselben Ziffern in umgekehrter Folge enthält, so erhält man 36. Wie heißt die Zahl, wenn sie das 7 fache ihrer Quersumme beträgt?

41. Vermehrt man eine zweiziffrige Zahl um 9, so erscheinen ihre Ziffern in umgekehrter Reihenfolge. Wie heißt die ursprüngliche Zahl, wenn dieselbe, um das 7 fache ihrer zweiten Ziffer vermehrt, 80 ergibt?

---

b) Aufgaben aus Hauswirtschaft und Handel.

42. Ein Weinhändler mischt 2 Sorten Wein. Mischt er 50 l der geringeren mit 100 l der besseren Sorte, so stellt sich der Preis für 1 l der Mischung auf 1 *M.* Mischt er hingegen 100 l der geringeren Sorte mit 50 l der besseren, so kostet ihm 1 l Mischung 0,90 *M.* Wieviel kostet 1 l jeder Sorte?

43. Mischt man a kg Tee mit b kg einer anderen Sorte, so stellt sich der Preis für 1 kg der Mischung auf q *M.* Er würde sich auf p *M* stellen, wenn b kg der ersten Sorte mit a kg der zweiten Sorte gemischt würden. Wieviel hatte 1 kg jeder Sorte gekostet?

44. Es werden zwei Sorten Kaffee zu 2,80 *M*, bzw. 3,20 *M* das kg so gemischt, daß 1 kg der Mischung 2,96 *M* kostet. Das kg der Mischung würde sich auf 3,08 *M* stellen, wenn von der ersten Sorte 3 kg weniger und von der zweiten 3 kg mehr genommen würden. Wieviel kg wurden von jeder Sorte genommen?

45. Mischt man 30 l Spiritus mit 70 l einer zweiten Sorte, so wird die Mischung 59 prozentig. Mischt man hingegen 50 l der ersten Sorte mit 40 l der zweiten, so enthält die Mischung $66\frac{2}{3}$ Prozent. Wieviel Prozent Alkohol enthält jede Sorte?

46. Ein Destillateur mischt 40 prozentigen Spiritus und 72 prozentigen. Die Mischung wird 60 prozentig. Nähme er von der ersten Sorte 13 l mehr, von der zweiten 5 l weniger, so würde die Mischung 52 prozentig. Wieviel l von jeder Sorte hat er genommen?

47. Ein Goldschmied legierte 40 g Gold mit einer zweiten Sorte von 750 Feingehalt und erhielt dadurch eine Legierung von 690 Feingehalt. Um Gold von 675 Feingehalt herzustellen, hätte er von der zweiten Sorte 20 g weniger nehmen müssen. Welchen Feingehalt hatte die erste Sorte, und wieviel g der zweiten Sorte wurden verwendet?

48. Aus zwei Salzsolen von 10% und 20% wird eine 14 prozentige Mischung hergestellt. Die Mischung würde 15,6% enthalten, wenn man von der ersten Sorte 14 kg und von der zweiten Sorte 36 kg mehr nähme. Wieviel kg der zweiten Sorte wurden genommen?

49. Gießt man Wasser von 20° zu Wasser von 50°, so erhält man Wasser von 30°. Würde man von der ersten Sorte 4 kg, von der zweiten 1 kg mehr hinzugießen als gemischt wurden, so würde die Temperatur der Mischung auf 29° fallen. Wieviel kg Wasser jeder Sorte wurden anfangs genommen?

50. Werden 10 l Wasser mit 5 l von einer anderen Temperatur zusammengegossen, so hat das Wasser eine Mischungstemperatur von 18°. Nähme man von jeder Art 5 l mehr, so stiege die Temperatur auf 18,6°. Welche Temperatur hatten die 10 l Wasser?

51. Auf einen Ballen Pariser Seidenwaren von 14,9 kg Reingewicht sind 147,75 ℳ Zoll zu entrichten. Die in der Sendung enthaltenen Spitzen müssen zum Satze von 1200 ℳ, die andere Ware zum Satze von 625 ℳ für den Doppelzentner verzollt werden. Wieviel kg Spitzen enthält die Sendung?

52. Ein Kaufmann kauft 2 Sorten Tee, das kg zu 9 ℳ und 6 ℳ, im ganzen für 465 ℳ. Beim Verkauf erhöht er den Preis der ersten Sorte um 16%, den der zweiten um $12\frac{1}{2}$% und gewinnt im ganzen 66 ℳ Wieviel kg jeder Sorte hat er gekauft?

53. Ein Weinhändler kauft 2 Sorten Wein, zusammen für 6630 ℳ. Für 1 l Rotwein zahlt er 2,50 ℳ, für 1 l Weißwein 1,20 ℳ. Er verkauft den Rotwein mit 14%, den Weißwein mit $16\frac{2}{3}$% Gewinn und gewinnt im ganzen 1005 ℳ. Wieviel l Weißwein hatte er gekauft?

54. Von zwei Posten Ware sollte der erste 70 ℳ mehr kosten als der zweite. Wird bei dem ersten 1% Rabatt mehr bewilligt als beim zweiten, so kostet er nur 63,35 ℳ mehr als dieser. Würde dagegen beim ersten Posten 2% Rabatt weniger als beim zweiten bewilligt, würde der Preisunterschied 73,85 ℳ betragen. Wieviel sollte der erste Posten kosten, und wieviel Prozent Rabatt wurden beim zweiten bewilligt?

55. Jemand hat 2 Rechnungen zu bezahlen, von denen die erste über 25 ℳ mehr lautet als die zweite. Wird bei der ersten 2% Rabatt mehr bewilligt als bei der zweiten, so sind bei jener nur 21,85 ℳ mehr zu zahlen als bei dieser. Vertauschte man die Prozentsätze, so würde der Unterschied der Barzahlungen 26,15 ℳ betragen. Wie hoch war die zweite Rechnung, und wieviel Prozent betrug ihr Rabatt?

---

c) Aufgaben aus dem Geldverkehr.

56. Unter die Insassen eines Spitals soll eine Summe von 54,50 ℳ verteilt werden. Erhält jeder Mann 0,60 ℳ und jede Frau 0,90 ℳ, so bleiben 3,50 ℳ übrig. Erhält jeder Mann 0,70 ℳ und jede Frau 1 ℳ, so fehlen 3,50 ℳ. Wieviel Männer und wieviel Frauen sind in dem Spital?

57. A und B teilen sich 540 ℳ, und zwar so, daß A zweimal soviel wie B und 90 ℳ bekommt. Wieviel ℳ erhält jeder?

58. Es sollen 37,30 ℳ unter Männer und Frauen verteilt werden. Erhält jeder Mann 3,50 ℳ und jede Frau 2,20 ℳ, so wird die ausgesetzte Summe gerade verbraucht. Würde jeder Mann 4,30 ℳ und jede Frau 2,80 erhalten, so würden 9,40 ℳ fehlen. Wieviel Männer und wieviel Frauen sollen von dem Gelde erhalten?

59. Zwei Brüder machen eine Erbschaft von 86 000 ℳ. Es ist testamentarisch verfügt worden, daß der jüngere $1\frac{1}{2}$ mal so viel wie der ältere und 10 000 ℳ bekommt. Wieviel erhält der ältere?

60. A und B besitzen zusammen 3000 ℳ. Gäbe A dem B 250 ℳ, so hätten beide gleich viel. Wieviel besitzt jeder?

61. Bei einem Konkurs verhalten sich die Forderungen zweier Gläubiger, A und B, wie 4 : 5. Wenn A auf 1000 ℳ, B auf 1600 ℳ verzichtete, so würden sich die Forderungen wie 5 : 6 verhalten. Wieviel hatte jeder zu fordern?

62. Jemand hat zwei Kapitalien ausgeliehen, das eine zu $3\frac{1}{2}$%, das andere zu 4%, und erhält jährlich 67 ℳ Zinsen. Wären die Prozentsätze vertauscht, so würden die jährlichen Zinsen 68 ℳ betragen. Wie groß ist jedes Kapitel?

63. Zwei Kapitalien, von denen das erste zu 4%, das zweite zu $4\frac{1}{2}$% ausgeliehen ist, bringen jährlich zusammen 50 ℳ Zinsen. Würde jedoch das erste zu $4\frac{1}{2}$%, das zweite zu 4% ausgeliehen, so würden die jährlichen Zinsen 47,75 ℳ betragen. Wie groß ist jedes Kapital?

64. Werden zwei Kapitalien zu $4\frac{1}{2}$%, bzw. $3\frac{3}{5}$% ausgeliehen, so bringen sie in einem Jahre gleich viel Zinsen. Würde dagegen das erste zu 4%, das zweite zu 3% ausgeliehen, so würden die Zinsen des ersten Kapitals 4 ℳ mehr als die des zweiten betragen. Wie groß ist das erste der Kapitalien?

65. Wird ein Kapital 4 Jahre zu $3\frac{1}{2}$% ausgeliehen, so bringt es 11 ℳ Zinsen weniger als ein anderes Kapital, das 6 Jahre zu $4\frac{1}{2}$% auf Zinsen steht. Würde aber das erste Kapital 4 Jahre zu $4\frac{1}{2}$% ausgeliehen sein, so würde es 27 ℳ mehr Zinsen bringen als das zweite Kapital zu $3\frac{1}{2}$% in 6 Jahren. Wie groß ist jedes Kapital?

66. Zwei Kapitalien, deren Summe 20 000 ℳ beträgt, bringen zusammen 2385 ℳ Zinsen, wenn das erste $3\frac{1}{2}$ Jahre zu $4\frac{1}{2}$%, das zweite $2\frac{1}{2}$ Jahre zu $3\frac{3}{4}$% ausgeliehen ist. Wie groß sind die Kapitalien?

67. 1200 ℳ und 1000 ℳ werden zu verschiedenen Prozentsätzen ausgeliehen und bringen jährlich zusammen 83 ℳ Zinsen. Vertauschte man die Prozentsätze, so würden die jährlichen Zinsen nur 82 ℳ betragen. Zu wieviel Prozent ist jedes der beiden Kapitalien ausgeliehen?

68. Ein Kapital von 1450 ℳ bringt 319 ℳ Zinsen und würde nur 174 ℳ Zinsen bringen, wenn es $2\frac{1}{2}$ Jahre weniger ausgeliehen wäre. Berechne Zinsfuß und Zeit.

69. 224 ℳ bringen 39,20 ℳ Zinsen und würden 67,20 ℳ Zinsen bringen, wenn der Zinsfuß um $\frac{1}{2}$% erhöht würde. Zu wieviel Prozent und wieviel Jahre steht das Kapital auf Zinsen?

70. Ein zu $3\frac{1}{3}$% ausgeliehenes Kapital bringt in einer gewissen Zeit 139,50 ℳ Zinsen. Wäre es ein Jahr länger ausgeliehen, so würden sich die Zinsen auf 170,50 ℳ belaufen. Wie groß ist das Kapital, und wieviel Jahre hat es auf Zinsen gestanden?

71. Die jährlichen Zinsen eines Kapitals von 67 500 ℳ betragen 1125 ℳ. Sie würden 1350 ℳ betragen, wenn das Kapital 1% Zinsen mehr gebracht hätte. Zu wieviel Prozent und wieviel Monate ist es ausgeliehen?

72. Ein Kapital brachte in zwei Jahren 368 ℳ Zinsen. Würde das Kapital 100 ℳ größer sein und zu demselben Zinsfuß 5 Jahre auf Zinsen gestanden haben, so hätte es 940 ℳ Zinsen gebracht. Wie groß war das Kapital, und zu wieviel % war es ausgeliehen?

73. Ein Kapital bringt in 3 Jahren 570 ℳ Zinsen. Ein zweites Kapital, das 1500 ℳ kleiner ist als das erste, bringt in $3\frac{1}{2}$ Jahren bei gleichem Zinsfuß 490 ℳ Zinsen. Zu wieviel Prozent sind diese Kapitalien verliehen, und wie groß ist jedes von ihnen?

74. A und B haben Geld ausgeliehen. B, welcher 900 ℳ mehr als A und $\frac{1}{3}$% höher ausgeliehen hat, erhält jährlich 51 ℳ Zinsen mehr als A. Würde man die Prozentsätze miteinander vertauschen, so erhielte B nur 12 ℳ Zinsen mehr als A. Wie groß ist das Kapital des A, und zu wieviel Prozent ist es ausgeliehen?

75. Ein Kapital bringt jährlich a ℳ Zinsen und würde b ℳ Zinsen bringen, wenn es p Prozent niedriger stände. Berechne Kapital und Zinsfuß.

76. Zwei Wechsel lauten über die gleiche Summe. Der erste, der in 3 Monaten fällig ist, wird mit 985 ℳ verkauft, der zweite, der in 9 Monaten fällig ist, und bei dem 2% Diskont weniger berechnet wurden, mit 970 ℳ. Auf welchen Betrag lautete jeder Wechsel, und wieviel Prozent Diskont wurden beim ersten bewilligt?

---

d) Bewegungsaufgaben.

77. Zwei Züge fahren von zwei Orten, welche 49 km voneinander entfernt liegen, gleichzeitig ab und begegnen sich nach 30 Minuten. Wäre der zweite Zug 6 Minuten später als der erste abgefahren, so würden die Züge 30 Minuten nach Abgang des ersten noch 5 km voneinander entfernt sein. Wieviel km legt jeder der Züge in einer Minute zurück?

78. Aus zwei Orten A und B, die 40 km voneinander entfernt liegen, gehen zwei Wanderer einander entgegen. Brechen sie gleichzeitig auf, so treffen sie sich nach 4 Stunden. Wäre hingegen der zweite eine Stunde nach dem ersten fortgegangen, so würden sie 3 Stunden nach Aufbruch des zweiten noch $4\frac{1}{2}$ km voneinander entfernt sein. Wieviel km legte jeder in der Stunde zurück?

79. Zwei Röhren liefern zusammen 266 l Wasser, wenn jede 8 Minuten geöffnet ist. Ist die erste 4 Minuten länger, die zweite 3 Minuten weniger geöffnet, so liefern sie zusammen 280 l Wasser. Wieviel Wasser liefert jede Röhre in der Minute?

80. Ein Gefäß kann von zwei Röhren zusammen in $3\frac{3}{7}$ Stunden gefüllt werden. Ist dagegen die erste 2 Stunden und die zweite $1\frac{1}{3}$ Stunde geöffnet, so wird nur die Hälfte des Gefäßes gefüllt. In welcher Zeit würde jede Röhre allein das Gefäß füllen?

81. Zwei Züge fahren aus zwei Orten, die 104 km voneinander entfernt liegen, gleichzeitig ab und treffen sich nach $\frac{3}{4}$ Stunden. Wäre der erste Zug 33 Minuten vor dem zweiten abgefahren, so würden sie eine Stunde nach Abgang des ersten noch 2 km voneinander entfernt sein. Wieviel km legt jeder der Züge in der Minute zurück?

82. Aus zwei Orten, die c km voneinander entfernt liegen, brechen zwei Fußgänger gleichzeitig auf und gehen einander entgegen. Sie treffen sich nach a Stunden. Würde der zweite eine Stunde nach dem ersten fortgegangen sein, so würden sie a Stunden nach dem Aufbruch des ersten noch d km voneinander entfernt sein. Wieviel km legte jeder in der Stunde zurück?

83. Zwei Körper sind 330 m voneinander entfernt. Laufen sie sich entgegen, so treffen sie sich nach 15 Sekunden. Laufen sie jedoch hintereinander her, so holt der erste den zweiten nach $2\frac{3}{4}$ Minuten ein. Wieviel m legt jeder der Körper in einer Sekunde zurück?

84. In einer Radfahrbahn von 450 m Länge fahren zwei Radfahrer von derselben Stelle und in derselben Richtung ab. Bei gleichzeitiger Abfahrt holt der erste den zweiten in 150 Sekunden ein. Führe aber der zweite 7,5 Sekunden vor dem ersten ab, so würde er von diesem 180 Sekunden nach Abfahrt des ersten eingeholt werden. Wieviel m legt jeder in der Sekunde zurück?

85. Von derselben Stelle einer kreisförmigen Bahn aus laufen zwei Schlittschuhläufer einander entgegen und treffen sich nach 30 Sekunden. Laufen sie dagegen hintereinander her, so überholt der erste den zweiten nach 130 Sekunden. Die Länge der Bahn beträgt 390 m. Wieviel m legt jeder in der Sekunde zurück?

86. Ein Gefäß kann durch eine Röhre gefüllt, durch eine andere entleert werden. Sind beide geöffnet, so ist nach 10 Minuten $\frac{10}{33}$ des Gefäßes gefüllt. Hingegen würde 15 Minuten nach Öffnung der ersten das ganze Gefäß gefüllt sein, falls die zweite Röhre 6 Minuten nach der ersten ebenfalls geöffnet würde. Wieviel Minuten würde die erste Röhre brauchen, um das ganze Gefäß zu füllen, und wieviel die zweite, um dasselbe zu entleeren?

87. Ein Wasserbehälter von 532 cbm kann durch 2 Röhren gefüllt werden Ist die erste 7 Minuten, die zweite 5 Minuten geöffnet, so sind 80 cbm Wasser in dem Behälter. Ist die erste 2 Minuten, die zweite 10 Minuten geöffnet, so sind 100 cbm eingeflossen. Wieviel cbm fließen durch jede Röhre in der Minute, und wieviel Minuten müssen beide Röhren gleichzeitig geöffnet sein, damit der Behälter gefüllt wird?

88. Zwei Röhren liefern zusammen c Liter Wasser, wenn jede a Minuten geöffnet ist. Würde die zweite Röhre 2 Minuten vor der ersten geöffnet werden, so würden sie a Minuten nach Öffnung der ersten Röhre d Liter Wasser mehr geliefert haben als zuvor. Wieviel l Wasser liefert jede Röhre in der Minute?

---

e) Aufgaben aus der Planimetrie.

89. Die Summe zweier **Winkel** eines Dreiecks beträgt 92° 11′, ihre Differenz 27° 19′. Wie groß ist jeder?

90. Der Außenwinkel eines Dreiecks ist 103° 48′ groß. Die Differenz der beiden Innenwinkel, welche nicht seine Nebenwinkel sind, beträgt 39° 16′. Wie groß ist jeder Winkel im Dreieck?

91. Im geraden Trapez beträgt die Differenz der Winkel, die einem Schenkel anliegen, 42° 45′ 14″. Wie groß ist jeder der beiden Winkel?

92. Der Inhalt eines **Dreiecks** beträgt 90 qm. Verkürzt man die Grundlinie um 6 m, so vermindert sich der Flächeninhalt um 36 qm. Wie lang sind Höhe und Grundlinie des Dreiecks?

93. Verlängert man die Höhe eines Dreiecks um 8 cm, so wächst sein Inhalt um 76 qcm. Wie groß sind Grundlinie und Höhe, wenn das Dreieck anfangs 133 qcm groß war?

94. Vergrößert man in einem Dreiecke die Grundlinie um 3 cm, so wächst sein Inhalt um 27 qcm. Würde man jedoch die Höhe um 3 cm verkürzen, so würde das Dreieck 12 qcm kleiner sein? Wie groß war das Dreieck anfangs?

95. Die Höhe eines **Trapezes** von 315 qcm Inhalt beträgt 9 cm. Die Grundlinien verhalten sich wie 3 : 7. Wie lang sind dieselben?

96. Ein Garten hat die Gestalt eines **Rechtecks**. Verlängert man die kleinere Seite um 3 m und verkürzt die größere um 1 m, so nimmt sein Inhalt um 21 qm zu. Verkürzt man hingegen die kleinere Seite um 2 m und verlängert die größere um 3 m, so wird der Garten 1 qm kleiner. Wie lang ist jede der Seiten?

97. Wenn man die eine Seite eines Rechtecks um 3 cm verkürzt und die andere um 2 cm verlängert, so entsteht ein Quadrat, dessen Inhalt um 4 qcm kleiner ist als der des Rechtecks. Wie lang sind die Seiten des Rechtecks?

98. Wird die kleinere Seite eines Rechtecks um 6 m verlängert, die größere um 5 m verkürzt, so entsteht ein Quadrat. Wie groß sind die Seiten des Rechtecks, und welchen Flächeninhalt hat das Quadrat, wenn sein Inhalt den des Rechtecks um 45 qm übertrifft?

99. Die Differenz zweier Seiten von zwei Ackerstücken, welche die Gestalt von Quadraten haben, beträgt 13 m, die Summe 37 m. Um wieviel ist das eine Stück Land größer als das andere?

100. Verkürzt man die größere Kathete eines **rechtwinkligen Dreiecks** um 2,5 m, die kleinere um 0,5 m, so entsteht ein gleichschenkliges Dreieck, dessen Inhalt um $2\frac{7}{8}$ qm kleiner ist als derjenige des rechtwinkligen Dreiecks. Wie groß sind die Katheten?

101. Die eine Kathete in einem rechtwinkligen Dreieck ist 15 cm lang, die andere ist 9 cm kürzer als die Hypotenuse. Wie lang ist diese?

102. Die Summe der Katheten in einem rechtwinkligen Dreieck beträgt 49 cm, ihre Differenz 7 cm. Wie groß ist die Hypotenuse?

103. Die Umfänge zweier **Kreise** betragen zusammen 175,84 m, ihre Radien verhalten sich wie 4 : 3. Wie groß sind die Radien? ($\pi = 3{,}14$.)

104. Die Peripherien zweier Kreise sind zusammen 106,76 cm groß. Die Radien verhalten sich zueinander wie $5 : 3\frac{1}{2}$. Welche Länge haben die Radien?

---

f) Aufgaben aus der Physik.

105. An den Endpunkten eines Hebels von 15 cm Länge wirken 2 Kräfte von 55 g und 20 g. Wo muß der Hebel unterstützt werden, wenn Gleichgewicht hergestellt werden soll?

106. Der eine Arm eines zweiarmigen Hebels ist 4 cm kürzer als der andere. Wie lang ist jeder, wenn 6 g an einem Arm 4 g am andern das Gleichgewicht halten?

107. Zwei Kinder von 30 kg und 24 kg Gewicht schaukeln auf einem gleichmäßig dicken Baumstamm und sind 9 m voneinander entfernt. In welcher Entfernung von der Achse muß jedes sitzen, wenn sie sich im Gleichgewicht halten wollen?

108. An einer Welle wird eine Last von 112 kg durch eine Kraft von 42 kg im Gleichgewicht gehalten. Der Halbmesser der Welle ist 50 cm kleiner als die Kurbellänge. Wie groß ist diese?

109. Wieviel g Gold und wieviel g Kupfer muß ein Goldschmied nehmen, um 564 g Legierung vom spez. Gewichte*) 14,1 zu erhalten?

110. Jemand wünscht aus Zinn und Kupfer 480 kg Legierung vom spez. Gewicht 8 herzustellen. Wieviel Zinn und wieviel Kupfer muß er dazu nehmen?

111. Wieviel kg Wasser von 24° C und 12° C muß man zusammengießen, wenn man 75 kg von 20° C erhalten will?

*) S. Anm. S. 120.

---

§ 33.

Gleichungen mit mehr als zwei Unbekannten.

1. Die Summe dreier Zahlen beträgt 71. Das 5fache der ersten Zahl ist gleich dem 6fachen der zweiten, und die dritte Zahl ist um 9 kleiner als die zweite. Wie heißen die Zahlen?

2. Es sind drei Zahlen gegeben: Addiert man zu jeder die doppelte Summe der beiden anderen, so ergeben sich die Zahlen 24, 21 und 20. Welche Zahlen sind es?

3. Von drei Zahlen, deren Summe 106 beträgt, verhält sich die erste zur zweiten wie 9 : 16 und die zweite zur dritten wie 4 : 7. Wie heißen die Zahlen?

4. Es werden drei Zahlen gesucht. Die Summe der beiden ersten Zahlen soll $= a$, die der beiden letzten $= b$, die der ersten und dritten Zahl $= c$ sein. Welche Zahlen sind es?

5. Eine Hausfrau gab für 5 kg Mehl und 3 kg Reis 2,60 *M*, für 4 kg Reis und 7 kg Zucker 5,10 *M*, für 10 kg Mehl und 9 kg Zucker 7,30 *M*. Wie teuer ist 1 kg jeder Ware?

6. A, B und C haben Geld ausgeliehen, A zu 3%, B zu $3\frac{1}{2}$%, C zu 4% A und B erhalten zusammen jährlich 246 *M* Zinsen, B und C 254 *M*, A und C 248 *M*. Wieviel Geld hatte jeder ausgeliehen?

7. Welche Länge haben die einzelnen Seiten eines Dreiecks, wenn a und b zusammen = 57 cm, b und c = 72 cm, a und c = 65 cm lang sind?

8. In drei Klassen einer Anstalt befinden sich 120 Schüler. Die Anzahl der Schüler der ersten Klasse verhält sich zu derjenigen der zweiten wie 13 : 9, die der zweiten Klasse zu derjenigen der dritten wie 9 : 8. Wieviel Schüler sind in jeder Klasse?

9. Ein Gefäß kann durch 3 Röhren gefüllt werden. Sie liefern zusammen 308 l Wasser, wenn die erste Röhre 4, die zweite 5 und die dritte 7 Minuten geöffnet ist. Sie liefern 388 l, wenn die erste Röhre 10, die zweite 9 und die dritte 3 Minuten geöffnet ist, und 650 l, wenn durch die erste 9, durch die zweite 11 und durch die dritte 14 Minuten lang Wasser in das Gefäß fließt. Wieviel l Wasser liefert jede Röhre in der Minute?

10. Wenn man von der ersten von drei Zahlen 5 subtrahiert und zur zweiten 5 addiert, so verhält sich die entstandene Differenz zur Summe wie 1 : 3. Subtrahiert man von der zweiten Zahl 15 und addiert zur dritten Zahl 15, so verhält sich Differenz zu Summe wie 2 : 11. Addiert man jedoch zur ersten Zahl 5 und subtrahiert von der dritten Zahl 5, so verhält sich Summe zu Differenz wie 4 : 7. Welche Zahlen genügen diesen Bedingungen?

11. In einer Familie zählen Großmutter, Mutter und Tochter zusammen 129 Jahre, Großmutter und Enkelin 88 Jahre, Großmutter und Mutter 113 Jahre. Wie alt ist jede?

12. Zu den höchsten Gebäuden der Welt gehören der Eiffelturm in Paris, der Kölner Dom und die Peterskirche in Rom. Der Eiffelturm und der Kölner Dom haben zusammen eine Höhe von 456 m, der Kölner Dom und die Peterskirche sind zusammen 299 m, der Eiffelturm und die Peterskirche 443 m hoch? Wie hoch ist jedes der Gebäude?

13. A hat 3000 ℳ, B 2400 ℳ, C 1800 ℳ ausgeliehen. Die jährlichen Zinsen der beiden ersten Kapitalien betragen zusammen 225 ℳ, die der beiden letzten 153 ℳ, die des ersten und dritten Kapitals 198 ℳ. Zu wieviel Prozent ist jedes Kapital ausgeliehen?

14. Wenn 3 Flaschen Moselwein und 5 Flaschen Rheinwein 15 ℳ, 4 Flaschen Moselwein und 5 Flaschen Bordeaux 18 ℳ, 8 Flaschen Rheinwein und 3 Flaschen Bordeaux 24 ℳ kosten, wie teuer ist eine Flasche jeder Sorte?

15. Zu einer gewissen Arbeit, die nach 90 Tagen fertiggestellt wurde, waren nacheinander drei Arbeiter angenommen worden. A begann die Arbeit, B setzte sie fort, und C vollendete sie. Schließlich erhielten alle drei die gleiche Summe, obgleich, wie vereinbart worden, der Tagelohn des A mit 2 ℳ, der des B mit 2,50 ℳ, der des C mit 3,20 ℳ berechnet wurde. Wieviel Tage hatte jeder gearbeitet?

16. Wird in einem Dreieck $\sphericalangle \beta$ um 4^0 und $\sphericalangle \gamma$ um 3^0 vergrößert, so verhalten sich die drei Winkel wie 14 : 10 : 21. Wieviel Grad mißt jeder der Winkel ursprünglich?

17. Aus 3 Sorten Wein stellt ein Weinhändler eine Mischung her. Mischt er 5 l der ersten Sorte mit 7 l der zweiten, so kostet die ganze Mischung 18,20 ℳ. Gießt er 3 l der zweiten Sorte zu 8 l der dritten, so kostet die Mischung 20,80 ℳ. Sie würde 16,60 ℳ kosten, wenn er 2 l der dritten Sorte mit 9 l der ersten gemischt hätte. Wieviel kostete 1 l jeder Sorte?

18. Drei Kapitalien im Gesamtbetrage von 24000 ℳ bringen jährlich zusammen 820 ℳ Zinsen, wenn das erste zu 3%, das zweite zu $3\frac{1}{2}$%, das dritte zu 4% ausgeliehen ist. Wäre das erste zu $3\frac{1}{2}$%, das zweite zu 4%, das dritte zu 3% ausgeliehen, so würden sich die jährlichen Zinsen auf 850 ℳ belaufen. Wie groß ist jedes Kapital?

19. Der Kolonialbesitz Deutschlands in Afrika, in der Südsee und in Asien umfaßt zusammen eine Fläche von 2672085 qkm. Die Kolonien in der Südsee und in Asien betragen zusammen 250085 qkm, während die Kolonien in Afrika 4844 mal so groß sind wie diejenigen in Asien. Wie groß sind die deutschen Kolonien a) in Afrika, b) in der Südsee, c) in Asien?

20. Die drei größten Provinzen des Königreichs Preußen sind Schlesien, Brandenburg und Hannover. Wie groß ist jede derselben, wenn Schlesien und Brandenburg zusammen 80300 qkm, Brandenburg und Hannover zusammen 78500 qkm, Schlesien und Hannover zusammen 78800 qkm umfassen?

21. „Drey haben gelt eyngelegt. Der erst vnd letst haben gelegt 55 Fl. Der ander und letst 60 Fl. Der ander und erst 25 Fl. Haben gewunnen 100 Fl. Die sollen sye teylen. Ist die frag erstlich Wievil yeder hab eyngelegt. Darnach wie vil yedem werde vom gwin". (Rudolff.)

22. Berlin, Paris und London haben zusammen 9500000 Einwohner. London und Berlin haben zusammen 6700000 Einwohner, während die Einwohnerzahl von Paris sich zu der Berlins wie 7:5 verhält. Gib die Einwohnerzahlen der einzelnen Städte an.

23. Ein Behälter kann durch die erste und zweite von drei Röhren gefüllt, durch die dritte entleert werden. Ist die erste Röhre 3, die zweite 7, die dritte 5 Minuten geöffnet, so enthält das Gefäß 47 l Wasser. Es würde 19 l Wasser enthalten, wenn die erste Röhre 6, die zweite 5, die dritte 7 Minuten geöffnet wäre, und 53 l, wenn die erste 12, die zweite 15 und die dritte 17 Minuten geöffnet bliebe. Wieviel l fließen durch jede der Röhren in der Minute?

24. Es werden drei Zahlen gesucht, die folgenden Bedingungen genügen: Die Summe der ersten und der dritten Zahl, vermindert um die zweite, ist $= c$. Die Summe der zweiten und dritten Zahl, vermindert um die erste, ist $= -a$, während die Summe aller Zahlen $= b$ ist. Welche Zahlen sind es?

---

25. Wie lang ist jede der Seiten eines Vierecks, wenn a, b und c zusammen $= 137$ cm; b, c und d $= 177$ cm; c, d und a $= 165$ cm und d, a und b $= 142$ cm sind?

26. Ein Wasserbehälter hat vier Zuflußröhren. Er enthält
143 l, wenn I. 5 Minuten, II. 4 Minuten, III. 3 Minuten,
230 l, wenn II. 5 Minuten, III. 2 Minuten, IV. 7 Minuten,
110 l, wenn III. 4 Minuten, IV. 1 Minute, I. 3 Minuten,
146 l, wenn IV. 2 Minuten, I. 7 Minuten, II. 3 Minuten
geöffnet ist. Wieviel l liefert jede Röhre in der Minute?

27. A, B, C und D haben Geld ausgeliehen, jeder 3000 ℳ. A, B und C erhalten zusammen jährlich 315 ℳ Zinsen, B, C und D 360 ℳ, C, D und A 345 ℳ, D, A und C 330 ℳ. Zu wieviel % ist jedes Kapital ausgeliehen?

28. Nach der Zählung von 1905 haben Berlin und Hamburg zusammen 2805000 Einwohner, während München 260000 Einwohner weniger als Hamburg und Dresden 25000 Einwohner weniger als München hat. Wieviel Einwohner zählt jede der vier größten deutschen Städte, wenn sie zusammen 3850000 Einwohner haben?

29. „Vier synd mir schuldig ein summa gelts. Der erst / ander vnd dritt 39 fl. Der ander / dritt vnd vierd 55 fl. Der dritt / vierd vnd erst 49 fl. Der vierd / erst vnd ander 43 fl. wie vil ist yeder in sonderheyt schuldig?" (Rudolff.)

XIV. Quadratwurzeln. Quadratische Funktionen. Quadratische Gleichungen.

§ 34.

Quadratwurzeln und quadratische Funktionen.

1. Wie heißen die Quadratwurzeln aus x^2; m^2; $(a - b)^2$; $(3x - 2y)^2$?
2. Welches sind die Quadratwurzeln der Zahlen 4; 25; 64; 100; 3600; 4900; 10000; 1000000?
3. Nenne die Quadrate der Zahlen 1 bis 20.
4. Gib an, zwischen welchen ganzen Zahlen die Quadratwurzeln aus 5; 84; 150 liegen.
5. Stelle als Quadratwurzel dar:
3; -7; 11; -13; 30; $-n$; $-a^2$; $4b^3$; $-2c^4$; $0{,}2d$; $-0{,}1a^3$; $\frac{1}{3}b$; $-\frac{2}{5}c^2$; $2x - 5y$; $5a - 3b + 2c$.

Den Wert folgender Summen auf die einfachste Weise zu bestimmen:

6. $3\sqrt{4} - 2\sqrt{4} + 7\sqrt{4} + 5\sqrt{4}$.
7. $6\sqrt{49} - 2\sqrt{49} + 11\sqrt{49} - 13\sqrt{49}$.

8. $11\sqrt{144} - 9\sqrt{144} + 15\sqrt{144} - 18\sqrt{144} + 3\sqrt{144} - 5\sqrt{144}$.

9. $3\sqrt{25} - 2\sqrt{36} + 5\sqrt{25} - 7\sqrt{36} + 4\sqrt{25}$.

10. $7\sqrt{81} + 11\sqrt{169} - 9\sqrt{81} - 14\sqrt{169} + 8\sqrt{81}$.

11. $3\sqrt{225} - 4\sqrt{196} + 8\sqrt{225} - 11\sqrt{196} - 5\sqrt{225} + 12\sqrt{196}$.

12. $5\sqrt{16} - 3\sqrt{64} + 9\sqrt{121} - 7\sqrt{16} - 8\sqrt{64} + 7\sqrt{121}$.

13. $3\sqrt{289} - 10\sqrt{49} + 7\sqrt{100} - 5\sqrt{49} - 7\sqrt{289} + 15\sqrt{100}$

---

14. $\sqrt{441}$. 15. $\sqrt{625}$. 16. $\sqrt{841}$.
17. $\sqrt{676}$. 18. $\sqrt{484}$. 19. $\sqrt{961}$.
20. $\sqrt{1156}$. 21. $\sqrt{1296}$. 22. $\sqrt{1681}$
23. $\sqrt{3136}$. 24. $\sqrt{2116}$. 25. $\sqrt{7225}$
26. $\sqrt{5776}$. 27. $\sqrt{9216}$. 28. $\sqrt{3481}$.
29. $\sqrt{9801}$. 30. $\sqrt{2304}$. 31. $\sqrt{6724}$.
32. $\sqrt{4489}$. 33. $\sqrt{1369}$. 34. $\sqrt{9409}$.
35. $\sqrt{23104}$. 36. $\sqrt{31329}$. 37. $\sqrt{18225}$.
38. $\sqrt{79524}$. 39. $\sqrt{53361}$. 40. $\sqrt{49729}$
41. $\sqrt{80656}$. 42. $\sqrt{34225}$. 43. $\sqrt{39601}$
44. $\sqrt{68644}$. 45. $\sqrt{57121}$. 46. $\sqrt{88209}$
47. $\sqrt{140625}$. 48. $\sqrt{243049}$. 49. $\sqrt{156025}$.
50. $\sqrt{344569}$. 51. $\sqrt{609961}$. 52. $\sqrt{927369}$.
53. $\sqrt{844561}$. 54. $\sqrt{470596}$. 55. $\sqrt{435600}$.
56. $\sqrt{5345344}$. 57. $\sqrt{2259009}$. 58. $\sqrt{9144576}$.
59. $\sqrt{45319824}$. 60. $\sqrt{25230529}$. 61. $\sqrt{65674816}$.
62. $\sqrt{533794816}$. 63. $\sqrt{231252849}$. 64. $\sqrt{6450017344}$.

---

65. $\sqrt{7,84}$. 66. $\sqrt{3,24}$. 67. $\sqrt{5,29}$.
68. $\sqrt{28,09}$. 69. $\sqrt{53,29}$. 70. $\sqrt{90,25}$.
71. $\sqrt{3,0276}$. 72. $\sqrt{216,09}$. 73. $\sqrt{835,21}$.
74. $\sqrt{1036,84}$. 75. $\sqrt{14,8996}$. 76. $\sqrt{3588,01}$.

77. $\sqrt{0,0324}$. **78.** $\sqrt{0,0729}$. **79.** $\sqrt{0,00001444}$.
80. $\sqrt{0,0049}$. **81.** $\sqrt{0,00000441}$. **82.** $\sqrt{0,00003025}$.

---

83. $\sqrt{2}$. **84.** $\sqrt{5}$. **85.** $\sqrt{3}$.
86. $\sqrt{7}$. **87.** $\sqrt{11}$. **88.** $\sqrt{13}$.
89. $\sqrt{35}$. **90.** $\sqrt{29}$. **91.** $\sqrt{410}$.
92. $\sqrt{805}$. **93.** $\sqrt{430}$. **94.** $\sqrt{670}$.
95. $\sqrt{4,9}$. **96.** $\sqrt{0,4}$. **97.** $\sqrt{8,1}$.
98. $\sqrt{3,6}$. **99.** $\sqrt{72,9}$. **100.** $\sqrt{67,6}$.
101. $\sqrt{2,5}$. **102.** $\sqrt{0,25}$. **103.** $\sqrt{0,025}$.
104. $\sqrt{0,0025}$. **105.** $\sqrt{0,529}$. **106.** $\sqrt{20,25}$.
107. $\sqrt{8}$. **108.** $\sqrt{18}$. **109.** $\sqrt{12}$.
110. $\sqrt{72}$. **111.** $\sqrt{24}$. **112.** $\sqrt{27}$.
113. $\sqrt{50}$. **114.** $\sqrt{48}$. **115.** $\sqrt{125}$.
116. $\sqrt{9,6}$. **117.** $\sqrt{1,47}$. **118.** $\sqrt{4,32}$.
119. $\sqrt{\frac{1}{4}}$. **120.** $\sqrt{\frac{1}{9}}$. **121.** $\sqrt{\frac{4}{25}}$.
122. $\sqrt{\frac{9}{64}}$. **123.** $\sqrt{\frac{49}{81}}$. **124.** $\sqrt{\frac{121}{289}}$.
125. $\sqrt{\frac{196}{225}}$. **126.** $\sqrt{\frac{144}{361}}$. **127.** $\sqrt{\frac{441}{625}}$.
128. $\sqrt{\frac{729}{1444}}$. **129.** $\sqrt{\frac{1681}{3481}}$. **130.** $\sqrt{\frac{7225}{9409}}$.
131. $\sqrt{2\frac{1}{4}}$. **132.** $\sqrt{5\frac{4}{9}}$. **133.** $\sqrt{3\frac{33}{64}}$.
134. $\sqrt{17\frac{16}{25}}$.
135. $\sqrt{\frac{1}{2}}$. **136.** $\sqrt{\frac{1}{3}}$. **137.** $\sqrt{\frac{2}{5}}$.
138. $\sqrt{\frac{4}{7}}$. **139.** $\sqrt{\frac{7}{8}}$. **140.** $\sqrt{\frac{5}{11}}$.
141. $\sqrt{2\frac{1}{2}}$. **142.** $\sqrt{1\frac{1}{5}}$. **143.** $\sqrt{3\frac{2}{3}}$.
144. $\sqrt{1\frac{4}{7}}$. **145.** $\sqrt{2\frac{1}{6}}$. **146.** $\sqrt{1\frac{3}{8}}$.

147. Wie groß wird die Funktion:

a) $y = x^2$ für $x = \pm 1; \pm 7; \pm 9; \pm 15$.

b) $y = x^2$ für $x = \pm 0,1; \pm 0,3; \pm 0,02; \pm 1,2; \pm 0,05$.

c) $y = x^2$ für $x = \pm \frac{1}{3}; \pm \frac{2}{7}; \pm \frac{6}{23} \pm 3\frac{1}{2}; \pm 4\frac{2}{5}$?

Bestimme:

148. $y = \sqrt{x}$ für $x = 9$; 25; 121; 4,41; 10,89; 262,44.

149. $y = \sqrt{x}$ für $x = 5$; 8; 10; 1,3; 2,04; 33,52.

150. $y = 2\sqrt{x} + 9\sqrt{x} - 4\sqrt{x}$ für $x = 1$; 36; 81; 0,04.

151. $y = 5\sqrt{x} - 7\sqrt{x} + 10\sqrt{x}$ für $x = 25$; 289; 3,24; 0,0049

152. $y = 3 + \sqrt{x}$ für $x = 9$; 1,44; $11\frac{1}{9}$.

153. $y = \sqrt{x} - 4$ für $x = 64$; 4; 16; 6,76; $1\frac{9}{16}$.

154. $y = \sqrt{x} - 2\frac{1}{4}$ für $x = 3$; $2\frac{1}{4}$; $1\frac{7}{9}$; 0,5.

155. Für die Funktion $y = x^2$ und $x = -3$; $-2\frac{1}{2}$; -2 usw bis $+3$ die Wertetabelle aufzustellen und die Kurve zu zeichnen. a) Welchen Wert durchläuft y, wenn x 1) von -3 bis 0 wächst; 2) von 0 bis $+3$ wächst? b) Wieviel Werte von x gehören zu einem Werte von y?

156. Die Kurven $y = x^2$ und $y = \sqrt{x}$ auf einem Blatt zu zeichnen, verschiedenfarbig auszuziehen und zu vergleichen.

157. Dasselbe für die Kurven der Funktionen:

$$\text{a) } y = x^2; \quad \text{b) } y = 2x^2; \quad \text{c) } y = \frac{x^2}{2}.$$

158. Die Funktion $y = \sqrt{2 + x}$ zeichnerisch darzustellen.

159. Zeichne die Kurve $y = \sqrt{5 - x}$.

160. Die Funktionen $y = 3x^2 + 2$ und $y = 3x^2 - 2$ auf einem Blatt zeichnerisch darzustellen und zu vergleichen.

161. Wo liegen die Scheitel der Parabeln:

$$1)\ y = 2x^2; \quad 2)\ y = 3x^2 + 7; \quad 3)\ y = 5x^2 - 4?$$

162. Zeichne auf einem Blatte die Kurven $y = 2x^2 + 1$ und $y = -2x^2 - 1$ und vergleiche sie.

163. Folgende Funktionen graphisch darzustellen:

1) $y = x^2 + 2$. 2) $y = 2x^2 + 3$. 3) $y = 2x^2 - 5$.
4) $y = -3x^2 - 4$. 5) $y = \frac{1}{3}x^2 + 1$. 6) $y = -\frac{1}{5}x^2 - 3$.

164. Untersuche den Einfluß 1) der Konstanten b, 2) des Faktors a der Funktion $y = ax^2 + b$ auf die Kurve.

165. Stelle die Funktionen $y = (x + 2)^2$ und $y = (x - 2)^2$ auf einem Blatte graphisch dar. Was ergibt sich in bezug auf die Scheitel der Parabeln?

166. Die Bilder folgender Funktionen zu zeichnen:

1) $y = (x - 3)^2$. 2) $y = x^2 + 5x + 6$. 3) $y = 2x^2 - 7x + 3$.

167. Bestimme a) den Scheitel, b) die Schnittpunkte mit der x=Achse der durch die folgenden Funktionen gegebenen Parabeln:

1) $y = 5x^2$. 2) $y = 3x^2 - 5$. 3) $y = \frac{1}{5}x^2 - 5$.

4) $y = -\frac{x^2}{4} + 5$. 5) $y = (x + 5)^2$. 6) $y = x^2 - 4x + 4$.

---

§ 35.

Gleichungen, in denen die Unbekannte unter der Wurzel steht.

A. Mit einer Unbekannten.

1. $\sqrt{x} = 2$. **2.** $\sqrt{x} = 6$. **3.** $\sqrt{x} = 9$.

4. $\sqrt{x} = 1$. **5.** $\sqrt{x} = \frac{2}{3}$. **6.** $\sqrt{x} = \frac{1}{8}$.

7. $\sqrt{x} = 0{,}3$. **8.** $\sqrt{x} = \frac{1}{0{,}2}$. **9.** $\sqrt{2x} = 4$.

10. $\sqrt{5x} = 3$. **11.** $\sqrt{8x} = 12$. **12.** $2\sqrt{x} = 4$.

13. $5\sqrt{3x} = 10$. **14.** $\sqrt{x + 2} = 3$. **15.** $\sqrt{x - 6} = 8$.

16. $\sqrt{2x + 1} = 7$. **17.** $\sqrt{4x - 5} = 11$. **18.** $3\sqrt{x + 2} = 4$.

19. $10\sqrt{8x - 9} = 40$. **20.** $2\sqrt{x + 5} = 5$.

21. $\sqrt{x + 3} = \sqrt{15 - x}$. **22.** $\sqrt{x + 9} = \sqrt{15 - x}$.

23. $\sqrt{9x + 1} = \sqrt{10x - 4}$. **24.** $\sqrt{9(x + 1)} = \sqrt{11x - 21}$.

25. $\sqrt{9x - 17} = \sqrt{7x + 9}$. **26.** $3\sqrt{x + 5} = 5\sqrt{x - 11}$.

27. $2\sqrt{7x + 1} = 6\sqrt{x - 1}$. **28.** $3\sqrt{6x - 5} = 5\sqrt{2x - 1}$.

29. $4\sqrt{2(3x + 5)} = 10\sqrt{x + 1}$. **30.** $5\sqrt{11x + 1} = 4\sqrt{9(2x - 1)}$.

31. $\sqrt{x} = a$. **32.** $\sqrt{x} = \frac{1}{b}$. **33.** $\sqrt{x} = a^2$.

34. $\sqrt{3x} = 6a$. **35.** $\sqrt{5x} = b$. **36.** $a\sqrt{x} = b$.

37. $ab\sqrt{x} = c$. **38.** $\sqrt{4ax} = 6a$. **39.** $a\sqrt{bcx} = d$.

40. $a\sqrt{x + b} = b$. **41.** $a\sqrt{x - b} = \sqrt{x + a}$.

42. $\sqrt{x(a + b) + 2b^2 - 2ab} = \sqrt{x(a - b)}$.

---

43. $\sqrt{x} + 3 = 9$. **44.** $5 + \sqrt{x} = 12$.

45. $12 - \sqrt{x} = 17$. **46.** $\sqrt{x} - 8 = 3$.

47. $12 + 5\sqrt{x} = 22.$ **48.** $54 - 7\sqrt{x} = -16.$

49. $31 + 2\sqrt{3x} = 43.$ **50.** $37 = 3\sqrt{5x} + 22.$

51. $12 + 5\sqrt{32x} = 52.$ **52.** $\sqrt{x} + a = b.$

53. $3a - a\sqrt{x} = -5a.$ **54.** $a + b\sqrt{x} = c.$

---

55. $15 + 9\sqrt{x} - 21 = 29 - 5\sqrt{x} - 7.$

56. $28 - 5\sqrt{3x} + 7 = 5 + 7\sqrt{3x} - 6.$

57. $13 - 12\sqrt{2x} + 9 = 4\sqrt{2x} - 12 + 30\sqrt{2x} + 11.$

58. $176 - 10\sqrt{5x} + 4 = 3\sqrt{5x} + 5\sqrt{5x} + 30.$

59. $5\sqrt{3x} + 19\sqrt{3x} - 14 = 54 - 37\sqrt{3x} - 8\sqrt{3x} + 1.$

60. $13\sqrt{4x} - 19\sqrt{4x} + 21 = 37 - 18\sqrt{4x} - 7\sqrt{4x} + 3\sqrt{4x}.$

61. $\frac{17 - 5\sqrt{3x}}{12} - 2 + 5\sqrt{3x} = 4\sqrt{3x}.$

62. $\frac{7\sqrt{6x} + 5}{4} - \frac{4\sqrt{6x} - 1}{3} = 3\sqrt{6x} - 1.$

63. $\frac{7\sqrt{x} - 3}{\sqrt{x} + 1} = 5.$ **64.** $\frac{9\sqrt{x} + 5}{3\sqrt{x} + 7} = 2.$

65. $5b + 3\sqrt{x} - 6b = 10b - 5\sqrt{x} - 3b.$

66. $10a - 3\sqrt{x} + 2a = 7a + 8\sqrt{x} - 6a.$

67. $7\sqrt{x} - 3\sqrt{x} + 2bc - 12bc = 3\sqrt{x} - 9bc.$

68. $\frac{6a - 5\sqrt{x}}{a} + \frac{2\sqrt{x} + a}{3a} = 2.$

69. $\frac{5\sqrt{2x} + 5b}{3} - \frac{3\sqrt{8x} - 4b}{2} = \sqrt{2x} - b.$

---

70. $(\sqrt{x} + 4)(\sqrt{x} + 1) = x + 24.$

71. $(\sqrt{x} + 3)(\sqrt{x} + 4) = x + 33.$

72. $(12 - \sqrt{x})^2 = x + 24.$

73. $x + 95 = (5 + \sqrt{x})^2.$

74. $(\sqrt{x} + 2)^2 = (\sqrt{x} - 1)^2 + 27.$

75. $(\sqrt{x} - 1)^2 = (\sqrt{x} - 3)^2 + 3\sqrt{x} + 2.$

76. $(\sqrt{x} + 3)(\sqrt{x} - 6) = (\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} - 22).$

77. $(\sqrt{x} + 4)(\sqrt{x} - 1) = \sqrt{x}(\sqrt{x} + 1) - 3.$

78. $\sqrt{x^2 + 3x + 9} + x = 12.$

79. $4 + \sqrt{9x^2 - 12x - 32} = 3x.$

80. $(\sqrt{x} + 5b)(\sqrt{x} + b) = x + 11b^2.$

81. $(\sqrt{x} + b)(\sqrt{x} - b) = a^2 - b^2.$

82. $(\sqrt{x} - c)(5c + \sqrt{x}) = 7c^2 + x.$

83. $(\sqrt{x} - 2ab)(3ab + \sqrt{x}) = x - a^2b^2.$

84. $\frac{4\sqrt{x} + 8a}{\sqrt{x} + 3a} = 3.$

85. $\frac{13\sqrt{x} - 14b}{4\sqrt{x} - 5b} = 4.$

---

86. $\sqrt{x + 12} = 2 + \sqrt{x - 4}.$

87. $\sqrt{x + 1} = 2 + \sqrt{x - 11}.$

88. $10 - \sqrt{5x + 9} = \sqrt{5x - 31}.$

89. $\sqrt{4x + 1} = 2 + \sqrt{4x - 15}.$

90. $\sqrt{5x + 14} - \sqrt{5(x - 5)} = 3.$

91. $\sqrt{9(x + 1)} - \sqrt{9x - 23} = 2.$

92. $3 + \sqrt{5(x - 4)} = \sqrt{5x + 19}.$

93. $\sqrt{5x + 21} = 17 - \sqrt{5x - 64}.$

94. $\sqrt{4(x + 11)} - \sqrt{4x - 51} = 5.$

95. $\sqrt{5x + 1} - \sqrt{5x - 3} = 1.$

96. $\sqrt{3x - 2} + \sqrt{3(x + 1)} = 5.$

97. $9 - \sqrt{3x - 2} = \sqrt{3x + 7}.$

98. $\sqrt{4x - 3} + 1 = \sqrt{4(x + 8)}$

99. $\sqrt{5x - 29} = \sqrt{5x + 19} - 2.$

100. $\sqrt{5x + 1} + 1 = \sqrt{5(1 + x)}.$

101. $2 + \sqrt{14x - 19} = \sqrt{14x + 29}.$

102. $\sqrt{x - 3a^2} + \sqrt{x + 9a^2} = 6a.$

103. $\sqrt{x + 5b^2} - \sqrt{x - 11b^2} = 2b.$

104. $\sqrt{a^2 + x + 2ab} = 2a - \sqrt{a^2 + x - 2ab}.$

105. $\sqrt{2ab + x^2} = 2a - \sqrt{x^2 - 2ab}.$

106. $\sqrt{10x + 9m^2} - m = \sqrt{10x - 4m^2}.$

---

107. $\sqrt{x + 4} - \sqrt{x - 1} = \sqrt{4x - 19}.$

108. $\sqrt{x + 2} + \sqrt{x - 3} = \sqrt{4x - 3}.$

109. $\sqrt{4(x - 4)} = \sqrt{x + 5} + \sqrt{x - 11}.$

110. $\sqrt{x+9} - \sqrt{x+2} = \sqrt{x+29} - \sqrt{x+18}$.

111. $\sqrt{x+34} - \sqrt{x+6} = \sqrt{x-5} - \sqrt{x-21}$.

112. $\sqrt{x+25} + \sqrt{x-8} = \sqrt{x+12} + \sqrt{x+1}$.

113. $\sqrt{x+7} - \sqrt{x} = \sqrt{x+40} - \sqrt{x+27}$.

114. $\sqrt{x} + \sqrt{x-16} = \sqrt{x+11} + \sqrt{x-21}$.

115. $\sqrt{x+7b} + \sqrt{2b+x} = 5\sqrt{b}$.

116. $\sqrt{8a+x} + \sqrt{x-8a} = 4\sqrt{a}$.

B. Mit zwei Unbekannten.

117. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 7$
$\sqrt{x} - \sqrt{y} = 1$.

118. $\sqrt{x} - \sqrt{y} = 2$
$\sqrt{x} + \sqrt{y} = 12$.

119. $8\sqrt{x} + 5\sqrt{y} = 31$
$8\sqrt{x} - 5\sqrt{y} = 1$.

120. $3\sqrt{x} + 2\sqrt{y} = 12$
$4\sqrt{x} - \sqrt{y} = 5$.

121. $3\sqrt{x} + 4\sqrt{y} = 23$
$2\sqrt{x} - 3\sqrt{y} = 4$.

122. $13\sqrt{x} + 4\sqrt{y} = 21$
$5\sqrt{x} - 2\sqrt{y} = 1$.

123. $5\sqrt{y} + 12\sqrt{x} = 92$
$13\sqrt{x} - 16\sqrt{y} = 14$.

124. $5\sqrt{x+6} - 4\sqrt{y+2} = 7$
$3\sqrt{x+6} + 5\sqrt{y+2} = 19$.

125. $2\sqrt{x+4} + 3\sqrt{y-2} = 12$
$5\sqrt{x+4} - 4\sqrt{y-2} = 7$

126. $3\sqrt{x-8} + 7\sqrt{y+5} = 34$
$11\sqrt{x-8} - 5\sqrt{y+5} = 2$.

127. $3\sqrt{7x+2} - \sqrt{4y+5} = 7$
$7\sqrt{7x+2} + 3\sqrt{4y+5} = 43$.

128. $7\sqrt{2x+1} - 5\sqrt{3y-5} = 1$
$9\sqrt{2x+1} - 4\sqrt{3y-5} = 11$.

129. $3\sqrt{7x-6} + 2\sqrt{3y+4} = 28$
$5\sqrt{7x-6} - 3\sqrt{3y+4} = 15$.

130. $3\sqrt{5x-1} + 4\sqrt{y+1} = 14$
$5\sqrt{5x-1} - 3\sqrt{y+1} = 4$.

131. $3\sqrt{7x+1} + 2\sqrt{4y-3} = 28$
$5\sqrt{7x+1} - 4\sqrt{4y-3} = 10$.

132. $2\sqrt{x + 4,5} + 5\sqrt{y + 1,6} = 16$
$3\sqrt{x + 4,5} - 2\sqrt{y + 1,6} = 5.$

133. $4\sqrt{x + 5,8} + 3\sqrt{2,5 + y} = 22$
$5\sqrt{x + 5,8} - 7\sqrt{2,5 + y} = 6.$

134. $\sqrt{x + y} + \sqrt{x - y} = 12$
$\sqrt{x + y} - \sqrt{x - y} = 2.$

135. $\sqrt{x + y} + \sqrt{x - y} = 14$
$\sqrt{x + y} - \sqrt{x - y} = 2.$

136. $\sqrt{x + y} - \sqrt{x - y} = 2$
$\sqrt{x + y} + \sqrt{x - y} = 16$

137. $\sqrt{2(3x + 2y)} + \sqrt{5x - y} = 7$
$\sqrt{2(3x + 2y)} - \sqrt{5x - y} = 1.$

138. $\sqrt{4x + 9y} - \sqrt{2x + 5y} = 2$
$\sqrt{4x + 9y} + \sqrt{2x + 5y} = 12.$

139. $3\sqrt{x + y} + 5\sqrt{x - y} = 36$
$5\sqrt{x + y} - 3\sqrt{x - y} = 26.$

140. $7\sqrt{x + y} - 5\sqrt{x - y} = 22$
$3\sqrt{x + y} + 2\sqrt{x - y} = 26.$

141. $5x - 2y + 4 = \sqrt{25x^2 + 4y^2 - 20xy + 12x + 19y - 40}$
$3x - y = \sqrt{9x^2 + y^2 - 6xy - 5x + 7y - 13}.$

142. $4x - y = \sqrt{16x^2 + y^2 - 8xy + 11x - 5y - 1}$
$3y + 2x = \sqrt{5y - 7x - 3 + 9y^2 + 12xy + 4x^2}.$

---

§ 36.

Rein quadratische Gleichungen.

1. Löse 1) durch Zeichnen der Parabeln,*) 2) durch Rechnung, die Gleichungen:
a) $x^2 - 9 = 0$; b) $3x^2 - 12 = 0$; c) $\frac{x^2}{2} - 8 = 0.$

2. $x^2 = 64$
3. $x^2 = 169.$
4. $x^2 = 400.$
5. $x^2 = 2,56.$
6. $x^2 = 7,29.$
7. $x^2 = \frac{36}{49}.$
8. $x^2 = 2\frac{1}{4}.$
9. $x^2 = \frac{625}{729}.$
10. $x^2 = \frac{4225}{5041}.$
11. $x^2 = m^2 + 2mn + n^2.$
12. $x^2 = 16a^2 - 24ab + 9b^2.$
13. $7x^2 = 252.$
14. $5x^2 = 1620.$
15. $3x^2 = 4,32.$
16. $0,6x^2 = 13\,500.$
17. $1,6x^2 = 14,4.$
18. $0,4x^2 = \frac{1}{10}.$
19. $2,5x^2 = \frac{1}{160}.$
20. $\frac{x^2}{3} = 27.$
21. $\frac{5x^2}{9} = 20.$
22. $1\frac{2}{5}x^2 = 140.$
23. $2\frac{1}{2}x^2 = 810.$
24. $1\frac{1}{3}x^2 = 8112.$

---

*) Vgl. § 34, S. 150 und 151.

25. $ax^2 = a^3$. **26.** $\frac{x^2}{d} = c^2 d$. **27.** $\frac{b^2 x^2}{a+b} = a + b$.

28. $3x^2 + 16 = 64$. **29.** $3x^2 - 26 = 49$. **30.** $x^2 - 1 = 0$.

31. $x^2 - a^2 = 0$. **32.** $ax^2 + bx^2 = (a + b)^3$.

33. $12x^2 - 275 = 313$. **34.** $25x^2 - 36 = 64$.

35. $190 - 4x^2 = 126$. **36.** $7x^2 - 50{,}36 = 124{,}64$.

37. $3x^2 - 27{,}3 = 335{,}7$. **38.** $125{,}6 - 4x^2 = -130{,}4$.

39. $\frac{3}{4}x^2 - 2\frac{1}{2} = 9{,}5$. **40.** $19{,}6 - \frac{2}{5}x^2 = -20\frac{2}{5}$.

41. $1\frac{3}{5}x^2 + \frac{3}{80} = \frac{15}{16}$. **42.** $x(x + 3) + x(x - 3) = 2$.

43. $x(x - 5) + x(x + 5) = 8$. **44.** $(x-3)(x+5) = (x-1)2 + 12$

45. $(x - 6)(x + 15) = (x - 5)(x + 14) + x^2 - 120$.

46. $(x + 5)^2 = (x + 4)^2 + x(x + 2)$.

47. $(x + 2)^2 + x^2 - 39 = (x + 1)^2 + 2x$.

48. $2(2x+1)(2x-1) + (x+2)(5x-2) = (4x+1)4x + (x+4)x - 42$.

49. $(9x + 1)(7x - 1) - (4x + 1)(4x - 1)$
$= (8x + 1)(7x - 1) + (x - 1)2x + (x - 10)$.

50. $x^2 + b^2 = b\left(b + \frac{4a^2}{b}\right)$.

51. $(x - a)(x + 2a) = (x + a)(x - 2a) + x(2a - x) + a^2$.

52. $\frac{15x}{8 - x} = \frac{8 + x}{x}$. **53.** $\frac{3x}{40 - x} = \frac{40 + x}{x}$.

54. $\frac{20 + x}{x} = \frac{3x}{20 - x}$. **55.** $\frac{15 + x}{x} = \frac{8x}{15 - x}$.

56. $\sqrt{15x^2 - 24x - 134} = 3x - 4$.

57. $\sqrt{35x^2 + 42x + 135} = 7x + 3$.

58. Das Produkt aus dem Dreifachen und dem Fünffachen einer Zahl beträgt 375. Wie heißt die Zahl?

59. Multipliziert man die Hälfte einer Zahl mit ihrem Fünffachen, so erhält man $\frac{5}{8}$. Welches ist die Zahl?

60. Das Produkt aus dem Achtfachen einer Zahl und ihrem fünften Teil beträgt $2\frac{1}{2}$. Wie heißt die Zahl?

61. Das Sechsfache einer Zahl, multipliziert mit der Hälfte derselben, ergibt $1\frac{1}{3}$. Welche Zahl ist es?

62. Multipliziert man den dritten und den neunten Teil einer Zahl miteinander, so erhält man 3. Welches ist die Zahl?

63. Subtrahiert man von dem Produkte zweier aufeinander folgender Zahlen 324, so erhält man die kleinere der beiden Zahlen. Wie heißt dieselbe?

64. Ein Mädchen kauft für 0,45 ℳ Aprikosen und erhält 5 mal so viel Aprikosen, wie sie Pfennige für das Stück bezahlt. Was kostet eine Aprikose?

65. Ein Wildhändler kauft einen Posten Hasen, und zwar 9 mal so viel Hasen wie er ℳ für einen bezahlt. Wieviel Hasen hat er gekauft, wenn er auf einen Hundertmarkschein 19 ℳ wiederbekommt?

66. Mehrere Personen wollen ein Bild verschenken. Gibt jede von ihnen doppelt so viel Mark, wie Personen vorhanden sind, so fehlen 10 ℳ am Kaufpreise. Zahlt hingegen jede 3 mal so viel Mark, wie die Anzahl der Personen beträgt, so bleiben 6 ℳ übrig. Wieviel Personen beteiligen sich an dem Geschenk, und wie teuer ist das Bild?

67. Verteilen sich die Schülerinnen einer Klasse so auf die vorhandenen Bänke, daß auf jeder Bank ein Viertel so viel Schülerinnen Platz nehmen, wie Bänke vorhanden sind, so müssen 9 Schülerinnen stehen. Setzen sich aber auf jede Bank ein Drittel so viel Schülerinnen, wie Bänke in der Klasse stehen, so sitzen auf der letzten Bank 3 Schülerinnen weniger als auf jeder der andern Bänke. Wieviel Bänke und wieviel Schülerinnen sind in der Klasse?

68. Zwei Quadrate, von denen das eine um 264 qcm kleiner ist als das andere, haben zusammen einen Flächeninhalt von 986 qcm. Wie groß ist die Seite eines jeden?

69. Ein rechteckiges Stück Feld von 196 m Länge und 36 m Breite soll gegen ein inhaltsgleiches Ackerstück, das die Gestalt eines Quadrats hat, umgetauscht werden. Wie lang muß die Seite von letzterem sein?

70. Einem Kreise ist ein Quadrat einbeschrieben, dessen Inhalt 288 qm beträgt. Welche Länge hat der Radius des Kreises?

71. Die Grundlinie eines Parallelogramms von 243 qm Inhalt beträgt $\frac{3}{4}$ der Höhe. Wie groß ist letztere?

72. In einem Dreieck von 36 qcm Inhalt beträgt die Höhe die Hälfte der Grundlinie. Wie groß ist diese?

73. Die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks ist $1\frac{1}{4}$ mal so groß wie die eine Kathete. Die andere Kathete ist 12 cm lang. Wie groß ist die Hypotenuse?

74. Wie groß ist die Höhe eines gleichschenkligen Dreiecks mit der Grundlinie $a = 24$ cm und dem Schenkel $s = 37$ cm?

75. Auf den Schenkeln eines rechten Winkels bewegen sich vom Scheitelpunkte aus zwei Körper I und II in gleichmäßiger Geschwindigkeit. I legt in der Sekunde 3 m, II 4 m zurück. Nach wieviel Sekunden werden sie 1500 m voneinander entfernt sein?

76. Die Hypotenuse in einem rechtwinkligen Dreieck beträgt 8,1 cm, die Projektion der Kathete b auf die Hypotenuse 3,6 cm. Wie groß ist b?

---

§ 37.

Gemischt quadratische Gleichungen.

Bilde die quadratische Ergänzung zu den folgenden Ausdrücken:

1. $x^2 + 6x$. 2. $x^2 - 4x$. 3. $x^2 + 10x$.
4. $x^2 - 12x$. 5. $x^2 + 18x$. 6. $x^2 - 26x$.
7. $x^2 - 1{,}4x$. 8. $x^2 - 2{,}4x$. 9. $x^2 + 3{,}6x$.
10. $x^2 + \frac{2}{3}x$. 11. $x^2 - \frac{6}{5}x$. 12. $x^2 + \frac{4}{7}x$.
13. $x^2 - 6bx$. 14. $x^2 + (m - n)x$. 15. $x^2 - \frac{2(a+b)x}{3}$.

---

16. $x^2 - 5x + 6 = 0$. 17. $x^2 - 9x + 20 = 0$.
18. $x^2 + 8x + 12 = 0$. 19. $x^2 + 8x + 7 = 0$.
20. $x^2 + x - 12 = 0$. 21. $x^2 + 2x - 15 = 0$.
22. $x^2 - 7x - 8 = 0$. 23. $x^2 + 10x + 21 = 0$.
24. $x^2 + 3x - 54 = 0$. 25. $x^2 - 18x + 65 = 0$.
26. $x^2 - 15x - 34 = 0$. 27. $x^2 + 2x - 120 = 0$.
28. $x^2 - 0{,}7x + 0{,}1 = 0$. 29. $x^2 + 0{,}5x + 0{,}04 = 0$.
30. $x^2 + 0{,}2x - 0{,}35 = 0$. 31. $x^2 + 2{,}3x + 1{,}32 = 0$.
32. $x^2 - \frac{3}{4}x + \frac{1}{8} = 0$. 33. $x^2 + \frac{3}{40}x - \frac{1}{40} = 0$.
34. $x^2 + \frac{5}{6}x - 1 = 0$. 35. $x^2 + 3\frac{9}{20}x + 2\frac{7}{10} = 0$.
36. $x^2 - 3ax + 2a^2 = 0$. 37. $x^2 + bx - 12b^2 - 0$.
38. $x^2 - 2ax + a^2 - b^2 = 0$.
39. $x^2 - 3(a - b)x + 2a^2 - 5ab + 2b^2 = 0$.

Welche Wurzeln hat die Gleichung:

40. $(x + 9)(x + 7) = 0$. 41. $(x - 6)(x + 11) = 0$.
42. $(x + 8)(x - 12) = 0$. 43. $(x - 36)(x + 21) = 0$.
44. $(x + 2{,}2)(x - 5{,}5) = 0$. 45. $(x + 1{,}5)(x + 4{,}2) = 0$.
46. $(x + \frac{3}{5})(x - \frac{7}{9}) = 0$. 47. $(x - 3\frac{1}{7})(x - 2\frac{1}{6}) = 0$.
48. $(x - a)(x - b) = 0$. 49. $(x + 2a)(x - 3b) = 0$?

50. Die Wurzeln einer quadratischen Gleichung seien:
a) 2 und 7; b) -9 und -1; c) 10 und -3;
d) $-1{,}9$ und $1{,}5$; e) $2\frac{1}{3}$ und $3\frac{1}{7}$; f) $-3a$ und $5b$.
Die Gleichung aufzustellen, auf die Normalform zu bringen und aufzulösen.

Zerlege die linken Seiten der folgenden Gleichungen in Faktoren und bestimme die Wurzeln:

51. $x^2 - 7x + 10 = 0$.
52. $x^2 - 10x + 24 = 0$.
53. $x^2 + 6x - 16 = 0$.
54. $x^2 - 3x - 70 = 0$.
55. $x^2 - 28x + 160 = 0$.
56. $x^2 + 6x - 91 = 0$.
57. $x^2 - 0{,}4x - 0{,}05 = 0$.
58. $x^2 - \frac{13}{15}x + \frac{2}{15} = 0$.

59. Zerlege das Produkt p der Wurzeln so in Faktoren, daß die Summe der Wurzeln s ergibt. Stelle die Normalform der Gleichung auf und löse sie:

1) $s = 10$; $p = 16$.
2) $s = 13$; $p = 42$.
3) $s = -19$; $p = 90$.
4) $s = -6$; $p = -55$.
5) $s = -1{,}5$; $p = -0{,}44$.
6) $s = \frac{11}{30}$; $p = \frac{1}{30}$.

Die Wurzeln folgender Gleichungen zu bestimmen, ohne die Gleichungen aufzulösen:

60. $x^2 - 7x + 6 = 0$.
61. $x^2 - 14x + 33 = 0$.
62. $x^2 + 14x + 45 = 0$.
63. $x^2 + 16x + 48 = 0$.
64. $x^2 - 3x - 4 = 0$.
65. $x^2 + 11x - 26 = 0$.

66.*) $4x^2 - 13x + 3 = 0$.
67. $5x^2 - 11x + 2 = 0$.
68. $2x^2 - 5x - 3 = 0$.
69. $3x^2 + 14x - 5 = 0$.
70. $3x^2 + 5x - 2 = 0$.
71. $5x^2 - 21x + 4 = 0$.
72. $2x^2 - 21x - 11 = 0$.
73. $5x^2 - 31x + 6 = 0$.
74. $2x^2 - 11x + 5 = 0$.
75. $7x^2 + 20x - 3 = 0$.
76. $5x^2 + 11x + 2 = 0$.
77. $3x^2 + 10x - 8 = 0$.
78. $2x^2 - 11x - 6 = 0$.
79. $3x^2 - 25x + 8 = 0$.
80. $2x^2 - 5x + 2 = 0$.
81. $4x^2 + 15x - 4 = 0$.
82. $5x^2 - 52x + 20 = 0$.
83. $7x^2 + 50x + 7 = 0$.
84. $5x^2 - 3 = 14x$.
85. $4x^2 - 41x = -10$.
86. $3x^2 - 10 = -13x$.
87. $4x^2 - 6 = 5x$.
88. $7 - 36x = -5x^2$.
89. $43x - 18 = -5x^2$.
90. $44 = -7x^2 - 81x$.
91. $10 = 17x - 6x^2$.
92. $5x^2 + 38x - 16 = -4x^2 - 32x$.
93. $11x^2 + 20x - 20 = 5x^2 - 17x + 15$.
94. $17x^2 + 87x + 90 = 7x^2 - 30x + 13$.
95. $13x^2 - 90x + 22 = 6x^2 - 3x - 14$.
96. $(x - 2)(x - 4) = 48$.
97. $(x - 2)(x + 6) = 33$.

---

*) Bei einigen Gleichungen sind die Wurzeln auf graphischem Wege zu bestimmen. Vgl. § 34, S. 150 und 151.

98. $(x - 4)(x + 11) = -36.$ **99.** $(x + 5)(x - 20) = -136.$

100. $(x - 4)^2 + (x - 2)^2 = x^2.$

101. $(2x - 5)^2 - (x - 4)^2 = 8x - 3.$

102. $(3x - 1)^2 - (2x - 1)^2 = 10x + 9.$

103. $(x - 1)^2 + (x + 1)^2 = 7x + 6.$

104. $(6x - 10)^2 = (10x + 40)(10x - 40) - 5(8x + 50) - 50.$

105. $(x + \frac{2}{3})^2 + (x + 1\frac{2}{3})^2 = (x - \frac{1}{3})^2 + 2(3x + 3\frac{1}{2}).$

106. $(x + 1\frac{1}{2})^2 + (x + \frac{1}{2})^2 = (x + 2\frac{1}{2})^2$

107. $(x + 5\frac{1}{2})^2 + (x - 1\frac{1}{2})^2 = (2x)^2$

108. $x + \frac{28}{x} = 11.$ **109.** $x + \frac{48}{x} = 14.$

110. $x - 2 = \frac{15}{x}.$ **111.** $x - 8 = \frac{9}{x}$

112. $x + 11 = \frac{26}{x}.$ **113.** $x - \frac{20}{x} = 19.$

114. $3x - 10 = \frac{8}{x}.$ **115.** $7x + \frac{6}{x} = -17.$

116. $\frac{4}{x} - \frac{36}{x+1} = -15.$ **117.** $\frac{3}{x} - \frac{40}{x+1} = -20.$

118. $\frac{9}{x-1} + \frac{2}{x} = -10.$ **119.** $\frac{8}{x-1} + \frac{15}{x} = -30.$

120. $\frac{27}{x+9} - \frac{3}{2(x-3)} = 1.$ **121.** $\frac{8}{4x-3} + \frac{2}{2x+1} = 2.$

122. $5 - \frac{5}{x-5} = \frac{10}{2x-13}.$ **123.** $\frac{3}{x-21} + \frac{5}{x-5} = \frac{25}{x}.$

124. $\frac{2}{2x-3} + \frac{1}{x+1} = \frac{11}{4x}.$ **125.** $\frac{3}{x+2} - \frac{1}{x+6} = \frac{7}{4x}.$

126. $\sqrt{3x^2 + 2x + 9} - x = 3.$ **127.** $9 + \sqrt{2x^2 + 6x - 7} = 10.$

128. $18 - \sqrt{9x^2 + 5x - 3} = 7$

129. $2(x + 1) : (3x - 1) = 2(2x - 1) : (4x + 1).$

130. $(3x - 1) : 3(x + 1) = (2x + 1) : 3(x - 1).$

131. $(5x - 11) : 3(x + 1) = (3x - 17) : (2x - 9).$

132. $2(2x - 5) : (4x + 7) = (x + 20) : 2x.$

133. $(2x + 1{,}5) : (x + 1{,}5) = (x + 0{,}5) : (x - 0{,}9).$

134. $(5x - 0{,}6) : (5x + 0{,}5) = (x + 0{,}2) : (2x - 0{,}5).$

135. $(2x - 1) : (x + \frac{5}{2}) = (x + \frac{3}{2}) : (3x + \frac{3}{2}).$

---

136. Die Summe zweier Zahlen beträgt 43, die Summe ihrer Quadrate 937. Wie heißen die Zahlen?

137. Die Summe der Quadrate zweier Zahlen, von denen die eine um 18 größer ist als die andere, beträgt 2210. Wie heißen die Zahlen?

138. Das Produkt zweier Zahlen, deren Summe 80 beträgt, ist gleich 1584. Welches sind die Zahlen?

139. Die Summe der Quadrate von zwei aufeinander folgenden Zahlen beträgt 841. Wie heißen die Zahlen?

140. Multipliziert man eine gewisse Zahl mit einer andern, die um 62 kleiner ist, so erhält man — 925. Welches sind die Zahlen?

141. Welche Zahl ist um $\frac{5}{6}$ größer als ihr reziproker Wert?

142. Addiert man die reziproken Werte von zwei aufeinander folgenden Zahlen, so erhält man $\frac{17}{72}$. Wie heißen die Zahlen?

143. „Such ein zal / Wann ich zum $\frac{1}{2}$ yhres quadrats 6 addir das gleych so vil vber 100 werde / als meyn zal ist vber 10." (Christoff Rudolff.)

144. Der Nenner eines Bruches ist um 1 größer als der Zähler. Addiert man zum Zähler und zum Nenner je 6, so wächst der Wert des Bruches um $\frac{1}{12}$. Wie heißt der Bruch?

145. Der Zähler eines Bruches ist um 2 kleiner als der Nenner. Vermehrt man den Zähler und den Nenner um je 8, so wächst der Wert des Bruches um $\frac{1}{8}$. Wie heißt der Bruch?

146. Dividiert man eine zweistellige Zahl mit der Quersumme 9 durch das Produkt ihrer Ziffern, so erhält man $5\frac{1}{7}$ weniger, als wenn man sie durch ihre erste Ziffer dividiert. Wie heißt die Zahl?

147. Die Quersumme einer zweistelligen Zahl ist 6. Der Quotient aus der Zahl und ihrer zweiten Ziffer ist um 3 größer als der Quotient aus der Zahl und dem Produkt ihrer Ziffern. Welches ist die Zahl?

148. Ein Gastwirt kauft für 34 ℳ Hühner. Hätte er für 1 Huhn 30 ₰ weniger bezahlt, als er bezahlen mußte, so hätte er 3 Hühner mehr erhalten. Wie teuer war 1 Huhn?

149. Der Wollstoff zu einem Kleide kostet 24 ℳ. Hätte man für dasselbe Geld 2 m mehr haben wollen, so hätte das Meter 1 ℳ billiger sein müssen. Wie teuer war 1 m?

150. „Einer kauft etliche Tücher für 180 Fl.*) Weren der Tücher 3 weniger kam yedes Tuch vmb 5 Floren thewrer. Wie vil sind der tücher?" (Christoff Rudolff.)

*) Vgl. Anm. S. 103.

151. „Zwen verkauffen weynbeer. Der erst 300 pfund, der ander 150 pfund. Gibt der erst ye für 1 Fl. drey Pfund weniger denn der ander / vnd löst 15 Fl. mehr denn der ander. Ist die frag / wie vil Pfund yeder geben hat für 1 Fl." (Christoff Rudolff.)

152. A würde mit seinem Reisegelde von 120 ℳ vier Tage länger reichen, wenn er täglich durchschnittlich 1 ℳ weniger ausgäbe. Wieviel Tage ist er unterwegs?

153. Die Kosten einer Landpartie mehrerer Personen belaufen sich auf 40 ℳ und würden 36 ℳ betragen haben, wenn 2 Personen mehr daran teilgenommen hätten und jede Person 1 ℳ weniger gebraucht hätte. Wie groß war die Anzahl der Teilnehmer?

154. Jemand bestellt zwei Kisten Apfelsinen verschiedener Qualität, die Kiste zu 5 ℳ. Es sind von der II. Sorte 25 Stück mehr vorhanden als von der I. Wie viele Apfelsinen enthält jede Kiste, wenn 5 Früchte der II. Sorte 5 ₰ weniger kosten als 5 Früchte der I.?

155. Bhâskara, ein indischer Mathematiker, geboren 1114 n. Chr., gibt die folgenden Aufgaben:*)

a) „Der 8. Teil einer Herde Affen, ins Quadrat erhoben, hüpfte in einem Haine herum und erfreute sich an dem Spiele; die 12 übrigen sah man auf einem Hügel miteinander schwatzen. Wie stark war die Herde?"

b) „Das Quadrat des um 3 verminderten 5. Teils einer Herde Affen war in einer Grotte verborgen; 1 Affe war sichtbar, der auf einen Baum geklettert war. Wie viele waren es im ganzen?"**)

156. Ein Kaufmann verkaufte eine Ware für 112 ℳ und gewann dabei halb so viel Prozent, wie der Einkaufspreis betrug. Wie hoch war dieser?

157. Ein Kapital von 4800 ℳ bringt 1440 ℳ Zinsen, wenn der Zinsfuß um 1 kleiner ist als die Anzahl der Jahre, die es ausgeliehen ist. Wie groß ist der Zinsfuß?

158. Die Zinsen einer Hypothek von 6500 ℳ betragen 975 ℳ, wenn die Anzahl der Jahre um 2 kleiner ist als der Zinsfuß, zu dem sie ausgeliehen wurde. Wie lange war sie ausgeliehen?

---

*) Aus Cantor: Vorlesungen über Geschichte der Mathematik.

**) „Bhâskara sagt 50 oder 5, aber der zweite Wurzelwert dürfe nicht genommen werden. Ein Kommentator erklärt uns, wie das gemeint sei. Man könne den 5. Teil von 5, oder 1, nicht um 3 vermindern, ohne daß, wenn auch nur vorübergehenderweise, die negative Zahl — 2 auftrete."

159. Ein Wechsel über 800 ℳ wird für 776 ℳ verkauft. Wieviel Prozent Diskont wurden berechnet, wenn die Anzahl der Monate, die der Wechsel bis zum Verfalltag noch zu laufen hatte, um 5 größer war als der Zinsfuß?

160. Ein Wechsel über 600 ℳ wird unter Anrechnung von 9 ℳ Diskont eingelöst. Wieviel Monate vor seinem Verfalltage geschah dies, wenn die Anzahl der Monate um 3 kleiner war als die Prozente des Diskonts?

161. Ein Wasserbehälter hat zwei Zuflußröhren. Um ihn zu füllen, braucht die erste 15 Minuten mehr als die andere. Werden beide Röhren gleichzeitig geöffnet, so ist der Behälter nach 18 Minuten gefüllt. In welcher Zeit kann die erste Röhre allein ihn füllen?

162. Um einen Fischkasten zu leeren, braucht eine Röhre 8 Minuten weniger, als eine zweite braucht, um ihn zu füllen. Wäre die Zuflußröhre 14 Minuten, die Abflußröhre 3 Minuten geöffnet, so würde die Hälfte des Behälters gefüllt sein. In wieviel Minuten kann die Zuflußröhre ihn füllen?

163. Zwei Körper I und II sind 800 m voneinander entfernt und bewegen sich einander entgegen. Der II. legt in der Sekunde 5 m weniger zurück als der I. und braucht daher, um die ganze Entfernung zurückzulegen, 8 Sekunden mehr als der I. a) Wieviel m hat jeder in der Sekunde zurückgelegt? b) Nach wieviel Sekunden werden sich die beiden Körper treffen?

164. Auf einer geraden Bahn von 300 m Länge laufen sich zwei Schlittschuhläufer A und B entgegen. A legt in der Sekunde 2 m mehr zurück als B, welcher für die ganze Strecke 5 Sekunden länger brauchen würde als A. a) Welche Geschwindigkeit hat jeder von ihnen? b) nach wieviel Sekunden werden sie sich treffen?

165. Zwei Kunstreiter reiten von derselben Stelle des Zirkus in entgegengesetzter Richtung ab und treffen sich nach 24 Sekunden. Wieviel Sekunden braucht der erste für die ganze Bahn, wenn er 20 Sekunden weniger braucht als der zweite?

166. Die Diagonale eines Quadrats ist 4 m länger als die Seite. Wie groß ist diese?

167. In einem Rechteck verhalten sich die Seiten wie 3 : 4. Die Diagonale beträgt 20 cm. Wie groß ist a) jede der Seiten? b) der Flächeninhalt des Rechtecks?

168. Ein Rechteck, dessen eine Seite 20 cm kleiner ist als die andere, ist inhaltsgleich einem Quadrat von 96 cm Umfang. Berechne die Seiten des Rechtecks.

169. Ein Quadrat von 72 m Umfang ist in ein Rechteck von 90 m Umfang zu verwandeln. Wie lang sind die Seiten dieses Rechtecks?

170. In einem rechtwinkligen Dreieck beträgt die Hypotenuse 26 cm, die zugehörige Höhe 12 cm. Wie groß ist jede der Projektionen der Katheten auf die Hypotenuse?

171. Die von der Spitze eines rechtwinkligen Dreiecks auf die Hypotenuse gefällte Höhe mißt 16 mm. Die Projektion der einen Kathete ist 24 mm kleiner als die der andern. Wie groß ist die Hypotenuse?

172. Der Umfang eines Rhombus mißt 80 m, die Differenz der halben Diagonalen 4 m. Wie groß ist jede der Diagonalen?

173. Die eine Diagonale einer Raute von 34 mm Umfang mißt 7 mm mehr als die andere. Wie groß ist a) jede der Diagonalen? b) der Flächeninhalt der Raute?

174. In welchem n=Eck beträgt die Summe der Diagonalen a) 252? b) 945?

175. Eine Sehne, welche 8 cm vom Mittelpunkte des Kreises entfernt liegt, ist 22 cm größer als der Radius. Wie lang ist sie?

176. Von einem Punkte außerhalb eines Kreises sind eine Sekante von 16 cm Länge und eine Tangente gezogen. Wie groß ist der Tangentenabschnitt, wenn er 3 cm mehr mißt als der außerhalb des Kreises liegende Abschnitt der Sekante?

Anhang.

Aufgaben aus der Stereometrie.*)

Das gerade Prisma.

1. Die Maßzahlen der Grundkanten eines geraden Prismas seien a und b, die Maßzahl der Seitenkante sei c. Berechne die Oberfläche (f) und den Rauminhalt (v) für:
   1) a = 5 cm; b = 8 cm; c = 7 cm;
   2) a = 0,8 m; b = 0,6 m; c = 0,5 m;
   3) a = $3\frac{1}{2}$ m; b = $4\frac{3}{4}$ m; c = $5\frac{1}{5}$ m.
2. a) Stelle die Körperdiagonale (d_1) eines Quaders als Funktion seiner Grundkanten a, b und c dar. b) Berechne sie für:
   1) a = 12 m; b = 16 m; c = 21 m.
   2) a = 9 cm; b = 12 cm; c = 8 cm.
3. 1) Die Grundkante a eines Quaders als Funktion von v, b und c darzustellen. 2) Wie groß ist sie für:
   a) v = 3960 ccm; b = 11 cm; c = 15 cm.
   b) v = $10\frac{1}{2}$ cbm; b = $1\frac{4}{5}$ m; c = $1\frac{2}{3}$ m?
4. *Die Körperdiagonale eines Quaders beträgt 21 cm; zwei seiner Kanten sind 8 cm und 11 cm lang. Wie groß ist die dritte?
5. Wieviel cbm Kies werden gebraucht, um einen Schulhof von 880 qm Flächeninhalt 3 cm hoch zu bedecken?
6. Wie schwer ist ein Balken aus Buchenholz von 5,2 m Länge, 20 cm Breite und 18 cm Höhe, wenn das spezifische Gewicht des Holzes 0,85 beträgt?
7. 1) Die Diagonale (d) der Seitenfläche, 2) die Körperdiagonale (d_1) eines Würfels als Funktion seiner Grundkante auszudrücken.
8. Berechne Rauminhalt (v), Oberfläche (f), Diagonale einer Seitenfläche (d), Körperdiagonale (d_1) eines Würfels, dessen Kante a) 3 m; b) 0,2 cm; c) 3,5 m; d) $\frac{3}{4}$ cm; e) $2\frac{1}{2}$ cm beträgt.
9. *Gegeben ist die Oberfläche (f) eines Würfels. 1) Drücke die Kante als Funktion von f aus. 2) Wie groß ist die Kante, wenn f:
   a) 54 qm; b) 96 qcm; c) 150 qcm; d) $13\frac{1}{2}$ qm; e) $28\frac{1}{6}$ qmm
   beträgt?

---

*) Die mit einem * bezeichneten Aufgaben führen auf quadratische Gleichungen

10. Ein Hohlwürfel faßt 2,133 kg destillierten Spiritus. (Spez. Gewicht 0,79.) Wie groß ist sein Rauminhalt?

11. Ein würfelförmiger Marmorblock ist 583,2 kg schwer. Wie groß ist das Volumen, wenn das spezifische Gewicht des Marmors 2,7 beträgt?

12. Zwei Kanten zweier Würfel betragen zusammen 199,5 cm, ihre Seitenflächen verhalten sich wie 64 : 121. Wie lang ist die Kante des kleineren?

13. Die Kanten zweier Würfel verhalten sich wie 1 : 4. Wie groß ist jeder, wenn der Kubikinhalt beider zusammen 4160 ccm beträgt?

Die Pyramide.*)

14. Die Höhe einer Pyramide als Funktion des Rauminhalts und der Grundfläche auszudrücken.

15. In einer Pyramide mit quadratischer Grundfläche ist die Kante der Grundfläche (a) = 6 cm, die Höhe der Seitenfläche (l) = 4 cm lang. Wie groß ist a) die Mantelfläche, b) die Oberfläche der Pyramide?

16. Dieselbe Aufgabe für a = 5,6 m; l = 2,1 m.

17. Berechne die Oberfläche einer Pyramide mit rechteckiger Grundfläche aus den Seiten des Rechtecks a und b und der Kante k einer Seitenfläche:

1) a = 14 cm; b = 20 cm; k = 25 cm;
2) a = 72 cm; b = 26 cm; k = 85 cm;
3) a = 1,12 m; b = 0,5 m; k = 0,65 m.

18. Die Grundfläche einer Pyramide ist ein Rechteck mit den Seiten a und b. Die Höhe der Pyramide ist h. Berechne den Rauminhalt aus:

1) a = 8 cm; b = 17 cm; h = 12 cm;
2) a = 3,5 m; b = 4,2 m; h = 6,3 m;
3) a = $4\frac{1}{3}$ cm; b = $2\frac{1}{2}$ cm; h = 6 cm.

19. Die Grundfläche g zu berechnen aus:

1) v = 800 ccm; h = 24 cm;
2) v = 84,48 ccm; h = 3,3 cm.

20. Die Grundkante a einer Pyramide mit rechteckiger Grundfläche zu berechnen aus v, b und h.

1) v = 105 ccm; b = 7 cm; h = 15 cm;
2) v = 30 ccm; b = 2,5 cm; h = 3,6 cm

---

*) Unter Pyramide ist in den folgenden Aufgaben eine gerade Pyramide zu verstehen.

21. Die Höhe h zu berechnen aus:

1) $g = 96$ m; $v = 160$ cbm;

2) $g = 9\frac{3}{4}$ m; $v = 13$ cbm.

22. Den Rauminhalt einer Pyramide mit rechteckiger Grundfläche zu berechnen aus der Grundkante $a = 8$ cm, der Diagonale der Grundfläche $d = 17$ cm, der Höhe des Körpers $h = 16$ cm.

23. Dieselbe Aufgabe für $a = 0{,}4$ cm; $d = 0{,}5$ cm; $h = 2{,}2$ cm.

24. Den Rauminhalt einer Pyramide mit rechteckiger Grundfläche zu berechnen aus:

1) $a = 5$ m; $b = 12$ m; $h = 9$ m;

2) $a = 2{,}8$ m; $b = 2{,}1$ m; $h = 5{,}4$ m.

25. *In einer Pyramide mit quadratischer Grundfläche beträgt die Seitenkante (s) 17 cm, die Höhe der Seitenfläche (l) 8 cm. Wie groß ist die Grundfläche?

26. *Dieselbe Aufgabe für $s = 2{,}8$ m; $l = 2{,}1$ m.

27. *Die Grundkante a einer quadratischen Pyramide zu berechnen aus:

1) $v = 960$ cbm und $h = 20$ m;

2) $v = 11{,}25$ ccm und $h = 15$ cm.

28. *Das Dach eines Gartenhauses bildet eine regelmäßige fünfseitige Pyramide. Die Gesamtlänge der Grundkanten beträgt 30 m, eine Seitenkante ist 5 m lang. Was kostet das Decken des Daches mit Schiefer, wenn 1 qm mit 3,80 ℳ berechnet wird?

29. *Die Pyramide des Cheops hat einen Rauminhalt von annähernd 2899200 cbm a) Wie hoch ist sie, wenn die Kante der quadratischen Grundfläche 240 m*) lang ist? b) wie groß ist ihr Mantel?

Der Zylinder.**)

30. Die Höhe eines Zylinders als Funktion des Radius der Grundfläche und a) des Rauminhalts v, b) des Mantels m auszudrücken.

31. Berechne 1) v, 2) m, 3) f aus:

a) $r = 1$ cm; $h = 3$ cm;

b) $r = 35$ m; $h = 23$ m;

c) $r = 4{,}2$ m; $h = 6{,}28$ m;

d) $r = 3\frac{1}{2}$ cm; $h = 2\frac{1}{4}$ cm.

---

*) Abgerundeter Wert.

**) Unter Zylinder ist in folgendem stets ein gerader Zylinder zu verstehen.

32. Die Höhe h zu bestimmen aus:

a) v = 44 cbm; r = 2 m;
b) v = 56 ccm; r = 4 cm;
c) v = 8,8 cbm; r = 0,1 m.

33. Wie groß ist der Durchmesser der Grundfläche eines Zylinders, dessen Mantel 280 qcm, dessen Höhe 35 cm beträgt?

34. Wieviel hl Wasser enthält ein zylindrisches Bassin von 20 m Durchmesser, das bis zu einer Höhe von 14 m gefüllt ist?

35. Bei einem zylindrischen Teetopf von 14 cm innerem Durchmesser beträgt die Höhe bis zum Ausguß 12 cm. a) Wieviel l Tee faßt derselbe; b) wieviel Tassen Tee von $\frac{1}{6}$ l Inhalt kann man aus demselben füllen?

36. 1,5 l Himbeersaft werden in einen zylindrischen Kessel von 28 cm innerem Durchmesser zu dem geläuterten Zucker gegossen. Um wieviel cm steigt die Masse im Kessel?

37. Ein rechteckiges Stück Blech von 157 cm Länge und 32 cm Breite wird zu einem Zylinder umgebogen. Die Länge des Bleches wird Grundkante des Hohlzylinders. Wieviel kleiner würde derselbe, wenn man die Breite zur Grundkante gemacht hätte?

38. In welcher Entfernung vom Boden muß der Eichstrich bei einem zylindrischen Bierglas von 5 cm Durchmesser angebracht werden, wenn dasselbe $\frac{3}{10}$ l fassen soll?

Der Kegel.*)

39. Man kennt von einem Kegel die Stücke:

a) r = 5 m; h = 14 m.	Berechne	v.
b) r = 6,5 cm; h = 7,7 cm.	"	v.
*c) v = 37,80 ccm; h = $5\frac{3}{5}$ cm.	"	r.
d) v = 6336 ccm; r = 1,2 cm.	"	h.
e) r = 22,4 cm; s = 41,8 cm.	"	m.
f) r = 45,25 cm; s = 66,5 cm.	"	m.
g) m = 62,8 qm; s = 10 m.	"	r.
*h) s = 18 cm; h = 14 cm.	"	f und v.
i) s = 50,8 m; h = 35,2 m.	"	f und v.
k) m = 1250 qcm; r = 25 cm.	"	s.
l) m = 31,40 qm; r = 1,25 m.	"	s.
*m) v = 314 cbm; h = 12 m.	"	f.

*) Unter Kegel ist in den folgenden Aufgaben ein gerader Kegel zu verstehen.

40. Der Achsenschnitt eines Kegels ist ein gleichseitiges Dreieck, dessen Seite 6 cm groß ist. Berechne den Rauminhalt.

41. *Der Mantel eines Kegels, dessen Achsenschnitt ein gleichseitiges Dreieck ist, beträgt 78,50 qcm. Wie groß ist das Volumen?

42. *Der Achsenschnitt eines Kegels, dessen Oberfläche 251,20 qm beträgt, ist ein gleichseitiges Dreieck. Wie groß ist der Rauminhalt?

43. *Ein rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten b = 8 cm und c = 15 cm dreht sich um die Kathete b. Berechne Rauminhalt und Oberfläche des hierdurch beschriebenen Körpers.

44. *Ein rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten b = 12 cm und c = 16 cm dreht sich erst um Seite b, danach um Seite c. a) Berechne in beiden Fällen Rauminhalt und Oberfläche der hierdurch beschriebenen Kegel. b) Gib an, bei welchem Kegel Rauminhalt und Oberfläche größer sind und um wieviel?

45. *Wie schwer ist ein eiserner Kegel von 8 cm Seitenlänge, dessen Grundfläche einen Durchmesser von 10 cm hat? (Spez. Gew. = 7,2).

46. Ein hölzerner Kegel von 4 cm Radius und 9 cm Höhe ist 72,35 g schwer. Welches ist das spezifische Gewicht des Holzes?

47. Ein Kegel von 10 cm Höhe soll in einen Zylinder mit gleicher Grundfläche umgegossen werden. Wie hoch wird derselbe werden?

48. *Wieviel m Leinwand von 80 cm Breite sind erforderlich für ein kegelförmiges Zelt von 4 m Höhe, dessen Grundfläche einen Durchmesser von 6 m hat? Wie teuer ist der Bezug, wenn 1 m Leinen 60 ₰ kostet?

49. *Ein kreisförmiges Turmzimmer, dessen Decke die Gestalt eines Kegelmantels hat, soll gestrichen werden. Der Durchmesser des Turms ist 4,6 m, die Entfernung seiner Spitze vom Fußboden beträgt 6,2 m, die Höhe der Wand 4 m. Was kostet der Anstrich der Wände und der Decke, wenn 1 qm mit 1,20 ℳ berechnet wird?

50. In einem Kegelstumpf*) von 4,2 m Höhe betragen die Radien der Grundkreise 1,6 m und 0,9 m. Rauminhalt, Mantel und Oberfläche sind zu berechnen.

51. Der aus Marmor (spez Gew. 2,7) bestehende Sockel eines Denkmals hat die Gestalt eines Kegelstumpfes. Die Höhe beträgt 2 m, die Radien der Grundkreise sind 1,5 m und 1,2 m groß. Wie schwer ist der Sockel?

---

*) Unter Kegelstumpf ist in dieser und den folgenden Aufgaben ein gerader Kegelstumpf zu verstehen.

52. *Die Radien der Grundkreise eines Kegelstumpfs sind $r = 40$ cm und $\varrho = 35$ cm; die Seitenlinie beträgt 90 cm. Berechne Mantel und Volumen.

53. Der Mantel eines Kegelstumpfs ist 350 qcm groß. Die Höhe des Achsenschnitts beträgt 15 cm, die Differenz der Radien der Grundkreise 5 cm. Wie groß ist der Rauminhalt?

54. Wieviel l faßt ein Wassereimer von 40 cm Höhe, der oben 24 cm und am Boden 18 cm Durchmesser hat? (Beides innen gemessen.)

55. Ein kupferner Blumentopf von 2 mm Dicke und 15 cm Höhe hat die Gestalt eines Kegelstumpfes. Der Topf hat oben 16,4 cm und am Boden 12 cm Durchmesser, beides außen gemessen. Wie schwer ist er? (Spez. Gew. d. Kupfers 8,8.)

Die Kugel.

56. Den Radius einer Kugel als Funktion a) der Oberfläche b) des Rauminhalts auszudrücken.

57. Wie groß sind Oberfläche und Rauminhalt einer Kugel, deren Radius:
1) 6 cm; 2) 8 m; 3) 2,5 m; 4) $6\frac{2}{3}$ m beträgt?

58. Die Oberfläche einer Kugel beträgt:
1) 348 qcm; 2) 286,8 qm; 3) 3532,64 qcm.
Berechne den Rauminhalt.

59. Der Durchmesser des Mondes, welcher annähernd die Gestalt einer Kugel hat, beträgt 3480 km. Wie groß ist seine Oberfläche?

60. Die Oberfläche der Erde ist 510 Millionen qkm groß. Wie groß ist der Erdradius?

61. Der Durchmesser des Mars ist 6780 km, der des Mondes 3474 km groß. Berechne die Differenz der Oberflächen beider Himmelskörper.

62. Wie schwer ist eine Kugel aus Elfenbein (spez. Gewicht 1,9) von 6 cm Durchmesser?

63. Die Oberfläche einer hölzernen Kugel ist 28,26 qdcm groß. Das spezifische Gewicht des Holzes beträgt 0,8. Wie schwer ist die Kugel?

64. Eine Metallkugel von 6 cm Radius wird in einen Zylinder, dessen Höhe gleich dem Durchmesser der Kugel ist, umgegossen. Berechne Radius und Mantel desselben.

65. Wieviel Flüssigkeit kann eine Halbkugel von 28 cm äußerem Durchmesser und 1,4 cm Wanddicke fassen?

66. Wie schwer ist eine eiserne Hohlkugel, deren Radien

a) 18 cm und 15 cm; b) 35,6 cm und 28,4 cm

groß sind? (Spez. Gew. des Eisens 7,9.)

67. Eine Hohlkugel faßt 280,4 ccm. Wie groß ist die Wanddicke, wenn der äußere Radius 5,8 cm beträgt?

68. Es werden 9 Kugeln von 2 cm Durchmesser aus $\frac{1}{2}$ kg einer Metallmischung geformt. Das spezifische Gewicht des Metalles ist anzugeben.

69. Wieviel Kugeln von 1 cm Durchmesser kann man aus 1 kg Blei (spez. Gew. 11,3) gießen?

70. Ein Luftballon von 18 m innerem Durchmesser wird mit Leuchtgas gefüllt. a) Wieviel Leuchtgas ist zur Füllung erforderlich; b) wie schwer ist dasselbe, wenn sein spezifisches Gewicht 0,6 beträgt?

Vermischte Aufgaben.

71. *Eine Pyramide von 10 648 ccm Inhalt und 66 cm Höhe soll in einen inhaltsgleichen Würfel mit derselben Grundfläche umgegossen werden. Wie groß ist die Kante desselben?

72. *Einer geraden quadratischen Pyramide mit der Grundkante a = 18 cm und der Höhe h = 64 cm ist ein Kegel eingeschrieben. Die Oberfläche des Kegels ist zu berechnen.

73. *Einem Kegel von 12 cm Radius und 15 cm Höhe ist eine gerade quadratische Pyramide eingeschrieben worden. Wie groß ist die Oberfläche derselben?

74. *Einer Kugel ist ein Würfel mit der Kante a = 30 cm einbeschrieben. Wie groß ist der Rauminhalt der Kugel?

75. *Auf einem Kreise von 5 cm Radius steht ein Kegel von 24 cm Höhe. Um wieviel ccm ist der Kegel größer als eine Pyramide von gleicher Höhe, deren Grundfläche gleich dem einbeschriebenen Quadrat des Kreises ist?

76. *Ein Zylinder von 16 cm Höhe und 10 cm Durchmesser ist durch einen Kegel von gleicher Grundfläche und 8 cm Höhe ausgehöhlt worden. Wie groß ist die Oberfläche des so entstandenen Gefäßes?

77. *Aus einem zylindrischen Baumstamme (spez. Gewicht 0,62) von 70 cm Dicke und 6,80 m Länge soll ein möglichst großer Balken mit quadratischen Endflächen herausgeschnitten werden. Wie schwer ist derselbe?

78. *Ein gerader Zylinder von 30 cm Höhe steht auf einem Kreise von 6 cm Radius. Um wieviel ccm ist der Zylinder größer als ein gerades Prisma von gleicher Höhe, dessen Grundfläche die Größe eines dem Kreise einbeschriebenen regelmäßigen Sechsecks hat?

79. Vier gleich große Kugeln wurden in einen zylindrischen Wasserbehälter von 18 cm innerem Durchmesser hineingeworfen. Das Wasser stieg um $1\frac{7}{9}$ cm. Wie groß ist der Radius der Kugeln?

80. *Aus einem Stück Holz, das die Gestalt einer geraden regelmäßigen Säule von 10 cm Höhe und eine quadratische Grundfläche von 16 qcm Inhalt hat, ist ein Zylinder so herauszudrehen, daß der Abfall möglichst gering wird. a) Um wieviel ccm ist die Säule größer als der Zylinder? b) Wie schwer ist der Abfall, wenn das spezifische Gewicht des Holzes 0,55 beträgt?

Anhang zu der vierten Auflage der
Arithmetischen Aufgaben für Lyzeen (höhere Mädchenschulen)
von **F. Kundt.**

Anhang.

Zu § 1. Addition eingliedriger Größen.

1. $2{,}3a + 4{,}6b + 3{,}7a + 2{,}4b.$

2. $4{,}21x + 7{,}07y + 3{,}5x + 7{,}09x + 8{,}33y.$

3. $2{,}531a + 3{,}04b + 7{,}023b + 5{,}25a + 3{,}3a + 1{,}009a + 1{,}017b.$

4. $\frac{2}{3}a + \frac{7}{10}b + \frac{5}{6}a + \frac{2}{5}b + \frac{7}{10}b + \frac{1}{6}a.$

5. $2\frac{1}{2}b + 3\frac{1}{3}c + 4\frac{1}{4}b + 5\frac{1}{5}c.$

6. $3\frac{1}{12}x + 2\frac{4}{5}y + 2\frac{3}{4}x + 4\frac{3}{10}y + 4\frac{1}{2}x + 3\frac{1}{10}y.$

Zu § 2. Addition von Summen.

7. $3{,}2x + (4{,}5x + 2{,}3y) + 3{,}4y + (2{,}5x + 6{,}7y).$

8. $5{,}32a + (6{,}2a + 8{,}03b) + (4{,}035a + 5{,}021b) + 3{,}615b.$

9. $14{,}23c + (15{,}04a + 19{,}823b + 14{,}9c) + (12{,}3a + 11{,}807b).$

10. $\frac{2}{3}a + (\frac{3}{4}a + \frac{4}{5}b) + (\frac{7}{12}a + \frac{2}{3}b) + \frac{8}{15}b.$

11. $2\frac{1}{3}a + (3\frac{1}{4}b + 2\frac{1}{5}c + 4\frac{1}{3}d) + (2\frac{5}{12}a + 2\frac{7}{10}c) + 1\frac{3}{8}b.$

12. $5\frac{2}{3}x + (4\frac{1}{2}x + 4\frac{7}{15}y + 8\frac{5}{9}z) + 7\frac{1}{3}y + (5\frac{2}{3}z + 5\frac{2}{5}y).$

Zu § 3. Subtraktion eingliedriger Größen.

13. $5{,}3a + 6{,}7b - 3{,}2a - 2{,}5b.$

14. $7{,}25a - 5{,}36a + 8{,}21b - 5{,}46b + 2{,}06a.$

15. $3{,}205x + 2{,}361y - 1{,}02x - 1{,}8y + 3{,}204y.$

16. $\frac{a}{2} + \frac{b}{3} - \frac{a}{5} - \frac{b}{8}.$

17. $\frac{3}{4}x - \frac{2}{5}x + \frac{5}{6}y - \frac{3}{4}y + \frac{3}{20}x + \frac{5}{12}y.$

18. $4\frac{1}{3}y + 5\frac{1}{2}x - 2\frac{2}{3}x - 3\frac{4}{15}y + 2\frac{2}{5}y + 3\frac{5}{6}x.$

Zu § 4. Subtraktion von Summen. Addition und Subtraktion von Differenzen.

19. $5{,}2a + (3{,}2a + 4{,}5b) - (5{,}4a + 2{,}5b).$

20. $7{,}93y + 6{,}7x - (2{,}33x + 4{,}22y) + (2{,}63x + 5{,}29y).$

21. $11{,}111y + (13{,}333x + 15{,}555z) - (7{,}077x + 5{,}05y + 9{,}3z).$

22. $\frac{4}{7}a + (\frac{2}{3}a + \frac{5}{6}b) - (\frac{5}{12}b + \frac{5}{21}a) + \frac{7}{12}b.$

23. $5\frac{1}{3}x + 7\frac{5}{6}y - (3\frac{7}{9}x + 2\frac{5}{24}y) + (5\frac{4}{9}x + 2\frac{3}{8}y).$

24. $13\frac{11}{18}a + (15\frac{13}{15}b + 12\frac{11}{12}c) + 10\frac{13}{24}c - (11\frac{2}{9}a + 13\frac{3}{5}b + 21\frac{1}{6}c).$

25. $0{,}3a + 0{,}1b + (0{,}07a - 0{,}06b) + (0{,}02b - 0{,}32a)$.
26. $8{,}7x + (3{,}6y - 5{,}9x) - (1{,}4x + 2{,}7y) + (5{,}2x + 2{,}4y)$.
27. $31{,}25a + (25{,}2a + 37{,}09b) + (13{,}203a - 29{,}4b) - (9{,}653a + 0{,}69b)$.
28. $\frac{4}{5}b + (\frac{2}{3}a - \frac{7}{15}b) + (\frac{5}{9}a - \frac{3}{10}b) - \frac{8}{9}a$.
29. $\frac{20}{27}y + (\frac{11}{12}x - \frac{2}{9}y) - (\frac{2}{3}x + \frac{5}{18}y) + (\frac{1}{4}x - \frac{2}{27}y)$.
30. $2\frac{3}{5}a + (3\frac{3}{10}a + 4\frac{5}{16}b) + (2\frac{3}{8}b - 4\frac{1}{2}a) + (3\frac{3}{5}a - 2\frac{11}{16}b)$.

---

31. $5{,}55a - (3{,}43a - 1{,}27b) - (5{,}95a - 3{,}12b)$.
32. $3{,}257a - (2{,}352a - 3{,}502b) - (1{,}635b - 0{,}527a)$.
33. $8{,}59y + (9{,}535x - 4{,}305y) - (2{,}78x - 2{,}79y) - (4{,}1x + 2{,}9y)$.
34. $\frac{a}{2} - \left(\frac{a}{5} - \frac{b}{4}\right) - \left(\frac{a}{15} - \frac{b}{12}\right)$.
35. $\frac{2}{7}x - (\frac{3}{14}x - \frac{7}{18}y) + (\frac{1}{2}x + \frac{4}{9}y)$.
36. $7\frac{5}{8}x - (2\frac{3}{4}x - 9\frac{3}{10}y) - (3\frac{1}{2}x + 2\frac{2}{5}y) + (5\frac{1}{8}x - 3\frac{1}{2}y)$.

Zu § 5. Addition und Subtraktion relativer Größen.

Addiere in den Aufgaben Nr. 37 bis Nr. 50 die untereinander stehenden Glieder.

37. $6{,}3x - 2{,}9y + 7{,}8z$
$-4{,}1x - 0{,}4y - 3{,}4z$.

38. $-0{,}32x - 0{,}96y + 0{,}19z$
$-0{,}59x + 0{,}38y - 0{,}83z$.

39. $-2{,}3a - 5{,}1b + 6{,}3c - 5{,}7d + 8{,}2e + 9{,}4f - 2{,}9g + 3{,}7h$
$5{,}1a - 2{,}3b - 7{,}5c + 6{,}8d + 0{,}7e - 11{,}7f - 1{,}2g - 7{,}2h$.

40. $5{,}33a + 5{,}29b - 3{,}06c - 2{,}85d + 4{,}21e - 5{,}99f - 4{,}56g$
$2{,}58a - 9{,}43b - 5{,}21c + 9{,}91d - 8{,}07e - 2{,}73f + 9{,}21g$.

41. $-2{,}352u - 5{,}602v + 3{,}291w + 5{,}2x - 9{,}003y - 2{,}75z$
$-3{,}409u + 8{,}298v - 9{,}6w + 2{,}994x + 3{,}087y + 7{,}006z$.

42. $2{,}3a + 4{,}7b - 8{,}1c$
$-1{,}7a - 2{,}9b + 3{,}2c$
$-3{,}9a + 1{,}4b + 1{,}3c$.

43. $-4{,}22a + 3{,}31b - 5{,}73c$
$-6{,}95a + 5{,}86b + 2{,}85c$
$+3{,}13a - 3{,}99b - 6{,}02c$.

44. $\frac{1}{3}a - \frac{1}{4}b + \frac{1}{5}c - \frac{1}{6}d$
$-\frac{1}{5}a + \frac{1}{4}b + \frac{1}{3}c - \frac{1}{2}d$.

45. $\frac{2}{3}a + \frac{3}{5}b + \frac{1}{6}c - \frac{3}{4}d$
$-\frac{5}{6}a - \frac{7}{15}b + \frac{2}{3}c + \frac{1}{2}d$.

46. $3\frac{1}{2}a + 3\frac{2}{3}b - 1\frac{1}{4}c - 4\frac{2}{3}d + 2\frac{1}{2}e - 2\frac{5}{6}f + 3\frac{3}{4}g$
$-1\frac{1}{2}a + 1\frac{1}{3}b + 5\frac{1}{4}c - 2\frac{1}{3}d - 5\frac{1}{2}e - 3\frac{1}{6}f - 3\frac{3}{4}g$.

47. $-6\frac{3}{8}a - 4\frac{2}{5}b + 5\frac{1}{3}c - 7\frac{5}{6}d - 3\frac{2}{3}e + 4\frac{3}{4}f - 1\frac{7}{12}g$
$-2\frac{1}{4}a + 9\frac{3}{10}b - 9\frac{5}{6}c - 1\frac{1}{3}d - 2\frac{5}{12}e - 9\frac{3}{8}f + 7\frac{1}{2}g$.

48. $7\frac{3}{5}a + 3\frac{7}{10}b - 5\frac{1}{2}c - 2\frac{3}{4}d + 3\frac{7}{12}e - 2\frac{7}{15}f + 8\frac{5}{6}g$
$- 2\frac{7}{10}a + 3\frac{1}{2}b + 1\frac{5}{6}c - 3\frac{1}{2}d - 9\frac{1}{12}e - 3\frac{1}{5}f - 2\frac{11}{12}g.$

49. $\frac{1}{2}x - \frac{2}{3}y - \frac{8}{15}z$
$- \frac{5}{6}x + \frac{3}{4}y + \frac{2}{3}z$
$\frac{2}{3}x - \frac{5}{12}y + \frac{1}{5}z.$

50. $- \frac{2}{3}x + \frac{1}{5}y - \frac{5}{6}z$
$- \frac{1}{4}x - \frac{3}{4}y + \frac{1}{2}z$
$\frac{1}{2}x + \frac{3}{10}y - \frac{1}{4}z.$

Subtrahiere in den Aufgaben Nr. 51 bis Nr. 62 das zweite Polynom vom ersten.

51. $5{,}3a - 2{,}3b + 3{,}6c$
$2{,}8a + 4{,}5b - 4{,}2c.$

52. $- 8{,}31a + 7{,}23b - 9{,}15c$
$2{,}96a - 4{,}79b - 1{,}86c.$

53. $- 2{,}7a - 3{,}4b + 1{,}6c + 5{,}4d - 3{,}9e + 6{,}2f - 2{,}9g$
$- 5{,}1a + 2{,}9b + 7{,}8c - 2{,}2d + 4{,}2e - 3{,}5f - 8{,}7g.$

54. $3{,}2a + 9{,}3b - 5{,}9c - 3{,}7d + 7{,}4e - 4{,}9f + 3{,}6g$
$- 4{,}9a + 2{,}7b + 2{,}3c - 9{,}1d - 1{,}8e + 2{,}3f + 9{,}5g.$

55. $9{,}23a - 7{,}45b + 2{,}03c - 3{,}45d - 5{,}67e + 4{,}82f + 7{,}16g$
$2{,}31a + 1{,}07b + 9{,}75c - 8{,}21d + 2{,}46e + 9{,}11f - 1{,}98g.$

56. $- 23{,}34u + 67{,}04v - 89{,}3\ w + 13{,}91x - 76{,}83y + 53{,}07z$
$66{,}59u + 12{,}89v + 9{,}57w + 90{,}05x - 13{,}5y + 89{,}2z.$

57. $\frac{1}{2}a - \frac{1}{3}b + \frac{1}{4}c - \frac{1}{5}d$
$\frac{1}{5}a + \frac{1}{4}b - \frac{1}{3}c - \frac{1}{2}d.$

58. $- \frac{3}{4}a - \frac{2}{5}b + \frac{1}{3}c + \frac{5}{6}d$
$\frac{1}{8}a - \frac{7}{10}b + \frac{5}{6}c - \frac{1}{12}d.$

59. $- \frac{3}{4}a - \frac{2}{3}b + \frac{1}{6}c - \frac{5}{12}d - \frac{1}{5}e + \frac{1}{2}f - \frac{3}{10}g$
$- \frac{1}{2}a + \frac{1}{6}b - \frac{3}{12}c - \frac{3}{4}d + \frac{7}{10}e + \frac{5}{8}f - \frac{4}{5}g.$

60. $\frac{11}{24}a + \frac{7}{18}b - \frac{5}{36}c - \frac{5}{21}d + \frac{11}{12}e - \frac{9}{22}f + \frac{11}{27}g - \frac{17}{30}h$
$\frac{1}{4}a - \frac{2}{9}b - \frac{11}{18}c + \frac{5}{7}d + \frac{5}{24}e + \frac{3}{11}f - \frac{4}{9}g - \frac{7}{10}h.$

61. $- 8\frac{1}{2}a - 2\frac{2}{3}b + 5\frac{1}{5}c + 6\frac{3}{4}d - 3\frac{7}{10}x - 7\frac{1}{6}y + 4\frac{4}{7}z$
$- 2\frac{1}{2}a + 4\frac{1}{3}b - 3\frac{4}{5}c + 1\frac{3}{4}d + 2\frac{3}{10}x - 2\frac{1}{6}y - 2\frac{3}{7}z.$

62. $2\frac{3}{5}a - 5\frac{3}{4}b - 9\frac{7}{12}c + 4\frac{1}{3}d - 3\frac{5}{8}e + 5\frac{7}{9}f - 8\frac{4}{5}g$
$- 3\frac{7}{10}a + 2\frac{1}{2}b - 3\frac{3}{4}c + 1\frac{5}{6}d + 4\frac{1}{4}e - 3\frac{2}{3}f - 1\frac{3}{10}g.$

Zu § 6. **Verwendung und Auflösung von Klammern.**

63. $7{,}3a - (2{,}8a + 5{,}3b) + (4{,}6a - 9{,}7b + 1{,}9a).$

64. $3{,}45x + (2{,}43y - 6{,}79z) - (2{,}35x - 7{,}07y) + 3{,}09z.$

65. $3{,}405a - (- 2{,}356a - 9{,}607b) + (1{,}203a - 4{,}006b).$

*

66. $\frac{3}{4}x + (\frac{1}{2}x - \frac{3}{5}y) - (-\frac{1}{4}x - \frac{4}{5}y) + \frac{9}{10}y$.
67. $2\frac{5}{12}x - (3\frac{5}{8}y - 1\frac{3}{4}x) + (6\frac{1}{4}x + 9\frac{3}{4}y - 3\frac{1}{12}x)$.
68. $9\frac{4}{9}x + (3\frac{2}{3}x - 5\frac{5}{6}y + 2\frac{4}{9}x) - (-1\frac{1}{9}x + 9\frac{1}{2}y)$.

Zu § 10. Multiplikation von Produkten und Summen.

69. $(5a + 6b - 7c)0{,}7$.
70. $(30a - 27b + 25c)0{,}03$.
71. $(-0{,}8x + 0{,}7y - 0{,}9z)21a$.
72. $(1{,}3a - 2{,}5b - 3{,}1c)0{,}02x$.
73. $(-4{,}31x - 6{,}05y + 3{,}22z)0{,}3b$.
74. $3{,}2y(0{,}12a - 0{,}7b + 5c)$.
75. $(\frac{2}{3}x - \frac{1}{5}y + \frac{5}{6}z)\frac{3}{4}$.
76. $(\frac{9}{10}a + \frac{5}{6}b - \frac{7}{8}c)1\frac{1}{3}$.
77. $\frac{1}{6}(2\frac{1}{2}a - 3\frac{1}{3}b + 4\frac{1}{5}c)$.
78. $1\frac{5}{7}a(5\frac{1}{2}x + 3\frac{1}{4}y - 2\frac{1}{2}z)$.
79. $(2\frac{1}{2}a - 3\frac{1}{3}b + 3\frac{3}{4}c)\frac{3}{20}x$.
80. $(1\frac{5}{7}x + 6\frac{2}{3}y - 3\frac{1}{5}z)2\frac{1}{4}m$.

Zu § 11. Multiplikation relativer Größen.

81. $(0{,}2a - 0{,}3b)4 + (0{,}5a + 0{,}4b)3$.
82. $(4{,}1x - 1{,}5y)0{,}3 - (2{,}3x + 2{,}7y)0{,}2$.
83. $1{,}12(0{,}6x - 0{,}8y + 0{,}1) - 1{,}05(0{,}7x - 0{,}5y + 0{,}8)$.
84. $\frac{2}{3}(3\frac{1}{2}a - 1\frac{2}{7}b) - \frac{3}{4}(1\frac{3}{5}a + 3\frac{1}{5}b)$.
85. $(\frac{3}{5}x - \frac{3}{10}y + \frac{3}{4}z)6\frac{2}{3} - (\frac{1}{2}x + \frac{5}{6}y - \frac{7}{8}z)1\frac{3}{5}$.
86. $(2\frac{1}{4}a - 3\frac{1}{2}b)1\frac{1}{3} + (1\frac{1}{5}a + 2\frac{2}{5}b)1\frac{3}{7} - (2\frac{1}{2}a - 3\frac{1}{3}b)2\frac{2}{5}$.

Zu § 16. Multiplikation zweier Polynome.

87. $(1{,}32x + 1{,}59y)(0{,}5x - 0{,}3y)$.
88. $(3{,}213x + 2{,}145)(3 - 20x)$.
89. $(2{,}4a + 3{,}1b - 5{,}2c)(0{,}6a + 0{,}4b - 0{,}7c)$.
90. $(0{,}05x - 0{,}3y + 0{,}1)(0{,}04 + 0{,}2x - 0{,}07)$.
91. $(\frac{3}{5}x - \frac{3}{4}y)(15x + 8y)$.
92. $(\frac{1}{3}a + \frac{1}{2}b)(1\frac{1}{5}a + 1\frac{1}{2}b)$.
93. $(1\frac{1}{2}a - 1\frac{1}{3}b + 5c)(\frac{2}{3}a + 3b - \frac{4}{5}c)$.
94. $(\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}y + \frac{1}{4}z)(\frac{1}{5}x - \frac{1}{4}y + \frac{1}{3}z)$.

Zu § 18. Division von Produkten und Summen.

95. $9{,}6xy : 1{,}2x$.
96. $1{,}19ab : 0{,}17ab$.
97. $1{,}35y : 0{,}15xy$.
98. $112ab : 1{,}4a$.
99. $0{,}34xy : 1{,}19y$.
100. $39ab : 10{,}4bc$.
101. $2{,}56ab : 6{,}4bc$.
102. $0{,}25ab : 1{,}25b$.
103. $11{,}9xyz : 0{,}17xz$.
104. $\frac{3}{4}ab : 2b$.
105. $\frac{4}{5}ab : \frac{2}{3}a$.
106. $\frac{5}{12}a : \frac{3}{4}ab$.
107. $2\frac{1}{3}xy : \frac{2}{3}z$.
108. $1\frac{4}{5}xy : 4\frac{1}{2}xy$.
109. $22\frac{1}{2}ab : 2\frac{1}{4}ax$.
110. $8\frac{3}{4}ab : 2\frac{1}{2}a$.
111. $12\frac{1}{2}xyz : 8\frac{3}{4}xy$.
112. $13\frac{1}{3}ab : 6\frac{2}{3}abc$.

Zu § 20. Division relativer Größen.

113. $\frac{-85xy^2}{+119x^2y}$. **114.** $\frac{+126xyz}{-42xz}$.
115. $(-169ab):(-39abc)$. **116.** $(+225ab):(+90ac)$.
117. $(+1{,}44ab):(-0{,}12b)$. **118.** $(-15{,}3a):(-8{,}5)$.
119. $(-8{,}4xy):(+0{,}56yz)$. **120.** $(+13{,}5abc):(-0{,}015ab)$.
121. $(+\frac{2}{3}ab):(+\frac{5}{6}ac)$. **122.** $(-\frac{5}{12}abc):(+\frac{3}{8}abcd)$.
123. $(-12\frac{1}{2}xy):(+3\frac{1}{8}xy)$. **124.** $(-10\frac{2}{3}xyz):(-4\frac{4}{5}xz)$.
125. $(-12a)\cdot(-5b):(+10ab)$.
126. $(+1{,}05xy)\cdot(-0{,}9y):(-0{,}15xy)$.
127. $(-11{,}9ab)\cdot(-0{,}5c):(+0{,}17ac)$.
128. $(-12{,}6b)\cdot(-0{,}03c):(-0{,}28ab)$.
129. $(+\frac{4}{5}ab)\cdot(-\frac{3}{4}c):(-\frac{3}{5}ab)$.
130. $(-2\frac{1}{2}bc)\cdot(+1\frac{1}{5}a):(-1\frac{1}{2}ab)$.
131. $(-0{,}3xy)\cdot(+0{,}2z):[(+0{,}4x)\cdot(+0{,}3z)]$.
132. $(+\frac{2}{3}ab)\cdot(-\frac{3}{5}d):[(-2\frac{1}{2}ad)\cdot(-1\frac{1}{5})]$.
133. $(-15ax+10bx-25cx):(-5x)$.
134. $(60axz+36ayz-84az):12az$.

Zu § 21. Division von einem Polynom durch ein anderes.

135. $(0{,}12a-0{,}18b):(0{,}2a-0{,}3b)$.
136. $(0{,}81a+0{,}93b):(0{,}27a+0{,}31b)$.
137. $(1{,}44ax-1{,}02ay):(2{,}4x-1{,}7y)$.
138. $(\frac{3}{10}ac+\frac{3}{20}bc):(\frac{1}{2}a+\frac{1}{4}b)$.
139. $(\frac{4}{9}xz-\frac{8}{15}yz):(\frac{2}{3}x-\frac{4}{5}y)$.
140. $(3\frac{3}{10}xz+5yz):(2\frac{1}{5}x+3\frac{1}{3}y)$.
141. $(6ac-9ad+10bc-15bd):(2c-3d)$.
142. $(24cx-15cy-32dx+20dy):(8x-5y)$.
143. $(0{,}02ax+0{,}06ay-0{,}03bx-0{,}09by):(0{,}1x+0{,}3y)$.
144. $(0{,}15ac-0{,}06bc-0{,}35ad+0{,}14bd):(0{,}05a-0{,}02b)$.
145. $(\frac{2}{3}ax-ay+bx-\frac{3}{2}by):(\frac{1}{3}x-\frac{1}{2}y)$.
146. $(\frac{3}{14}ax+\frac{5}{21}ay-\frac{3}{16}bx-\frac{5}{24}by):(1\frac{1}{2}x+1\frac{2}{3}y)$.

Zu § 24. Multiplikation und Division von Brüchen.

147. $\frac{7x}{5ab}\cdot 15abc$. **148.** $\frac{2z}{11xy}\cdot 121xy$. **149.** $\frac{35cd}{72ab}\cdot 36b$.
150. $\frac{24ab}{35d}\cdot 105cd$. **151.** $\frac{0{,}4y}{0{,}9z}\cdot 2{,}7xz$. **152.** $\frac{0{,}03a}{0{,}7bc}\cdot 8{,}4bcd$.
153. $\frac{2a}{5b}:4ac$. **154.** $\frac{25xz}{8y}:75x$. **155.** $\frac{85cd}{2a}:136bc$.

156. $\frac{0{,}8\,cd}{0{,}5} : 0{,}4\,d.$ **157.** $\frac{0{,}54\,abx}{0{,}7} : 0{,}18\,ax.$ **158.** $\frac{0{,}095\,xz}{0{,}2\,y} : 1{,}71\,z.$

159. $\left(\frac{10\,ax}{d} + \frac{25\,bx}{e} - \frac{15\,cx}{f}\right) : 5x.$

160. $\left(\frac{77\,ax}{3u} - \frac{99\,ay}{2v} + \frac{55\,az}{4w}\right) : 11a.$

161. $\left(\frac{50\,ad}{x} - \frac{135\,bd}{4y} + \frac{24\,cd}{z}\right) : 15d.$

162. $\left(-\frac{119\,abc}{4x} - \frac{85\,abd}{3y} + \frac{51\,abe}{2z}\right) : (-34ab).$

163. $\frac{3\,ab}{2c} \cdot \frac{4\,cd}{5a} \cdot \frac{15\,a}{4d}.$ **164.** $\frac{7a}{8bc} \cdot \frac{5\,de}{14\,ac} \cdot \frac{16\,bc}{15\,ade}.$

165. $\frac{25x}{21yz} \cdot \frac{27z}{16x} \cdot \frac{56\,xy}{75z}.$ **166.** $\frac{63\,yz}{15x} \cdot \frac{8x}{77y} \cdot \frac{55\,xy}{24z}.$

167. $\left(\frac{8x}{9a} - \frac{22\,xy}{15\,ab} + \frac{16\,y}{21\,b}\right) \cdot \frac{3\,ab}{2\,xy}.$

168. $\left(-\frac{104\,b}{125\,d} + \frac{91\,bc}{50\,a} - \frac{143\,c}{75\,d}\right) \cdot \frac{25\,ad}{26\,bc}.$

169. $21xy : \frac{3x}{5a}.$ **170.** $57ab : \frac{19b}{12c}.$ **171.** $85xy : \frac{34y}{5z}.$

172. $2\frac{1}{4}ab : \frac{3a}{4c}.$ **173.** $1\frac{7}{10}ab : 4\frac{1}{4}ax.$ **174.** $2\frac{2}{15}abd : \frac{8ab}{5}.$

175. $\left(\frac{13\,ab}{15\,cd} \cdot \frac{75\,dy}{91\,bx}\right) : \left(\frac{24\,a}{25\,cx} \cdot \frac{5}{48}\right).$

176. $\left(\frac{49x}{15\,cy} : \frac{8x}{3\,ab}\right) : \left(\frac{35\,by}{18\,cd} : \frac{25\,y}{63\,ax}\right).$

177. $\left(\frac{15\,ac}{8\,bd} - \frac{35\,cd}{12\,be} + \frac{25\,ad}{48\,b}\right) : \frac{5\,ac}{6\,be}.$

178. $\left(\frac{36\,a}{49\,x} - \frac{72\,b}{35\,xy} - \frac{16\,ax}{21\,bz}\right) : \frac{18\,a}{35\,yz}.$

Zu § 27. Gleichungen ersten Grades mit einer Unbekannten.

179. $34x - (20 + 13x) + (23x - 17 + 12x) = 21x - 2.$

180. $75 + (36x + 25) - (15x - 32) + (26 - 14x - 11) = 0.$

181. $54x - (42 + 35x) + (19x - 41) - (25x + 21) = 0.$

182. $209x - (150x - 101 + 36x) + (205 - 86x) + 9 = 0.$

183. $5{,}2x + (3{,}2 + 2{,}1x) - (1{,}7x - 4{,}5) - (6{,}3 + 1{,}4x) = 0.$

184. $2{,}3 - (1{,}5 + 3{,}2x) - (6{,}5x - 5{,}7 + 1{,}7x) + 4{,}9 = 0.$

185. $2{,}33 - (4{,}25x - 5{,}16) - (1{,}68 - 2{,}35x) + (4{,}05x - 0{,}64) = -1{,}28.$

186. $\frac{1}{3}x + (\frac{2}{5} - \frac{5}{6}x) - (\frac{1}{2}x - \frac{3}{10}) - \frac{1}{5} = 0.$

187. $\frac{5}{12} - (\frac{3}{4} + \frac{4}{5}x) + (\frac{2}{3}x - \frac{1}{6}) = \frac{2}{15}x + \frac{1}{2}.$

188. $2\frac{1}{2}x + (1\frac{1}{3} - 1\frac{1}{4}x) = 2\frac{3}{8}x + 3\frac{1}{6} - (-1\frac{7}{8}x - 1\frac{1}{6}).$

Zu § 30. Gleichungen ersten Grades mit zwei Unbekannten.

189. $7x - 3y = 1$
$2x + 5y = 12.$

190. $8x + 5y = 34$
$9y - 2x = 12.$

191. $9x - 7y = -12$
$4x + 5y = 19.$

192. $6x + 5y = 37$
$5x - 3y = -5.$

193. $3x + 7y = 33$
$11x - 14y = 2.$

194. $2x - 13y = 1$
$5y - x = -2.$

195. $4x + 3y = 1$
$5x - 6y = -28.$

196. $7x - 8y = 29$
$4x + 15y = -3.$

197. $3x - 5y = -5$
$2y - 9x = -27.$

198. $8x + 9y = -2$
$3y - 7x = -20.$

199. $2x - 3y = -7$
$11x - 9y = 29.$

200. $5x - 8y = -99$
$9y - x = 79.$

201. $25x - 17y = -59$
$13x + 20y = 27.$

202. $19x + 21y = -101$
$32x - 7y = -43.$

203. $3(x - 1) + 5(y + 4) = 28$
$7(x + 3) + 2(y + 5) = 47.$

204. $4(x - 2) + 5(y + 3) = 29$
$9(x + 2) - 3(y + 7) = 18.$

205. $2(x - 10) + 3(y - 1) + 5(x + 2) = -36$
$5(x - 3) - 7(y + 5) + 9(x + 12) = -40.$

206. $11(5x - 3) - 9(2x - 3y) + 5(y + 5) = -30$
$12(3x + 4y) + 7(x - 5) - 3(2x - 3) = -96.$

207. $(3x + 5)y - (3y - 2)x + (3x - 2y)5 = 7$
$(2y - 1)x - (2x + 3)y + (5y - 2)3 = 17.$

208. $(5y + 2)x + (2x + 3y)4 - (5x - 4)y = 120$
$(4x - 3)y - (5 + 4y)x + (2x - 7y)3 = -116.$

209. $0{,}3x - 0{,}2y = 0{,}3$
$0{,}7x + 0{,}5y = 6{,}5.$

210. $2{,}3x + 5{,}1y = 24{,}5$
$7{,}4x - 3{,}1y = 20{,}3.$

211. $0{,}2x - 0{,}3y = 0{,}9$
$5{,}55x + 6{,}66y = 39{,}96.$

212. $2{,}31x - 5{,}26y = 33{,}23$
$3{,}15y - 4{,}09x = -28{,}02.$

213. $5{,}2x - 3{,}7y + 2{,}1x - 109 = 0$
$6{,}3y - 4{,}9x - 3{,}5y + 70 = 0.$

214. $3{,}7x + 2{,}5y - 8{,}9x + 0{,}2 = 0$
$9{,}5y - 3{,}2x + 5{,}7x - 21{,}5 = 0.$

215. $2(0{,}3y - 0{,}1x) + 3(0{,}4x - 0{,}3y) = 2{,}4$
$5(0{,}5x + 0{,}2y) - 4(0{,}3y + 0{,}2x) = 4{,}7.$

216. $4(0{,}5x + 0{,}1y) - 7(0{,}1x - 0{,}2y) = 49$
$3(0{,}7y - 0{,}6x) + 5(0{,}4x - 0{,}3y) = 14.$

217. $(2{,}1x - 3{,}4y)3 - (2{,}5y - 1{,}2x)4 = 75{,}7$
$(1{,}8x + 2{,}3y)5 - (1{,}2x - 1{,}3y)7 = -17{,}6.$

218. $(0{,}3x - 0{,}1)14y - (1{,}4y + 2{,}5)3x = -16{,}4$
$(3{,}6y + 1{,}3)2x - (2{,}4x - 1{,}1)3y = 8{,}5.$

219. $3x + \frac{y}{2} = 17$
$\frac{x}{2} - 5y = -48.$

220. $\frac{x}{3} - 2y = -14$
$\frac{y}{4} + 3x = 20.$

221. $3y - \frac{x}{4} = 23$
$\frac{x}{2} + 3y = 17.$

222. $3x - \frac{y}{5} = 34$
$\frac{x}{6} + 7y = 72.$

223. $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 8$
$\frac{x}{5} - \frac{y}{6} = 1.$

224. $\frac{x}{2} - \frac{y}{3} = 2$
$\frac{x}{5} - \frac{y}{8} = 1.$

225. $3\frac{1}{2}x + \frac{y}{3} = 9$
$2x + 3\frac{1}{3}y = 24.$

226. $2\frac{1}{3}y - 7x = -21$
$3\frac{1}{4}x + 2\frac{1}{5}y = 59.$

227. $\frac{2x}{7} + \frac{3y}{2} = 22$
$\frac{5y}{6} - \frac{3x}{14} = 7.$

228. $\frac{3y}{5} - \frac{5x}{6} = -4$
$\frac{4x}{5} - \frac{3y}{7} = 9.$

229. $\frac{x}{y} = \frac{5}{4}$
$\frac{2x}{5} + \frac{3y}{4} = 10.$

230. $\frac{7x}{8} - \frac{4y}{15} = 27$
$\frac{y}{x} = \frac{3}{4}.$

231. $\frac{3x+8}{5} + \frac{y}{4} = 5$
$\frac{2y-3}{5} + \frac{x}{4} = 2.$

232. $\frac{7x+4}{6} - \frac{y}{2} = 2$
$\frac{5(x+1)}{9} + \frac{y}{4} = 9.$

233. $\frac{2x+1}{3} - \frac{y+5}{5} = 9$
$\frac{4x-5}{7} + \frac{9y+5}{20} = 0.$

234. $\frac{3x-2}{5} - \frac{4y-5}{3} = -3$
$\frac{7y-5}{6} - \frac{9x+4}{10} = 1.$

235. $\frac{3x+7}{4} + \frac{7y-2}{8} = 2$
$\frac{8x-3}{7} - \frac{9y-2}{5} = 7.$

236. $\frac{12x-5}{13} - \frac{2x+3y}{4} = -4$
$\frac{7y-4x}{17} + \frac{9-8x}{7} = 9.$

237. $\frac{2x-3y}{10} - \frac{6+5y}{8} = -6$
$\frac{9y-2x}{25} + \frac{70-3y}{8} = 7.$

238. $\frac{3x-2y}{4} - \frac{5y-4x}{3} = -3\frac{2}{3}$
$\frac{3x+5y}{9} + \frac{2x-8y}{5} = -5\frac{3}{5}.$

239. $\frac{2x+3y+5}{3} - \frac{3y-2x-1}{2} = 4$
$\frac{5x-2y+8}{4} - \frac{2x-3y+10}{5} = 2.$

240. $\frac{3x-6+2y}{6}+\frac{7x+11-5y}{7}=-19$

$\frac{4x-4+5y}{8}-\frac{8y-12+3x}{9}=-4.$

241. $\frac{2x-5y+3}{5}+\frac{3y-5x-7}{2}-\frac{3x+2y+1}{4}=-6$

$\frac{7y-2x+3}{5}-\frac{4x+3y+2}{3}-\frac{5x-2y+5}{6}=-2.$

242. $\frac{9x-4y+5}{10}-\frac{5x+7y-3}{8}+\frac{3y-4x-6}{7}=-5$

$\frac{5y-4x+7}{9}+\frac{3x+5y-5}{5}-\frac{7x-2y+9}{8}=-7.$

243. $\frac{x+3y}{2x-3}=2$

$\frac{2x+3}{2y-3}=3$

244. $\frac{3x-y}{y+1}=4$

$\frac{4y-1}{x-3}=3.$

245. $\frac{5(x+y)}{4y-1}=2$

$\frac{9y+4}{2(x+3)}=4.$

246. $\frac{7x+y}{2}=6$

$\frac{5y+2x}{3}=9.$

247. $\frac{50-3y}{x-5}=4$

$\frac{3(x-2y)}{30-y}=5.$

248. $\frac{13x+4y}{11y-3x}=\frac{5}{6}$

$\frac{44x-3y}{13y+1}=\frac{7}{8}.$

249. $\frac{15x-4y}{8y-5}=1\frac{1}{7}$

$\frac{3(6y-5x)}{6x+1}=1\frac{1}{5}.$

250. $\frac{11x-1}{5(3+y)}=1\frac{3}{5}$

$\frac{5x+6y}{2(4y+3)}=1\frac{1}{2}.$

